

מתווה לפתרון ממ"ן 14

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 סמסטר: 2022
 חומר הלימוד למטלה: פרק 9
 משקל המטלה: 6 נקודות

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $f: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ פונקציה אינטגרבילית ב- $[0,1]$. הוכיחו שהפונקציה $g: \bar{B}^k(0^{[k]};1) \rightarrow \mathbf{R}$ שמוגדרת על ידי $g(x) = f(|x|)$ אינטגרבילית ב- $\bar{B}^k(0^{[k]};1)$.

פתרון

יש מספר דרכים לפתור את השאלה. אפשר לפתור אותה תוך שימוש בהגדרת האינטגרביליות ולא הרבה יותר מזה. אפשר לפתור אותה בעזרת מבחן לבג לאינטגרביליות וזה מה שאעשה כאן.

הקבוצה $K = \bar{B}^k(0^{[k]};1)$ היא סגורה וחסומה ובעלת נפח, ולכן לפי חלק ב של מסקנה 28.9.

הפונקציה g אינטגרבילית בה אם ורק אם הקבוצה $K \setminus \text{cont}(g)$ צנומה. זאת עלינו להוכיח.

יהי $\varepsilon > 0$. עלינו להראות שהקבוצה דלעיל מוכלת באיחוד של אוסף בן מניה של תיבות סגורות מיושרות שסכום נפחיהן קטן מ- ε .

הפונקציה f אינטגרבילית ב- $[0,1]$ ולכן מאותה סיבה $[0,1] \setminus \text{cont}(f)$ היא קבוצה צנומה.

לפי הגדרה 4.9 יש אוסף בן מניה של קטעים סגורים $\Omega = \{[\alpha_n, \beta_n] \mid n \in \mathbf{N}\}$ שאיחודם מכיל את

הקבוצה $[0,1] \setminus \text{cont}(f)$, ואשר סכום אורכיהם קטן מהמספר החיובי $\frac{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}{k \cdot \pi^{\frac{k}{2}}} \cdot \varepsilon$.

(נראה בהמשך למה דוקא המספר הזה). אז:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n) < \frac{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}{k \cdot \pi^{\frac{k}{2}}} \cdot \varepsilon$$

נוכל גם להניח שלכל $n \in \mathbf{N}$ מתקיים $[\alpha_n, \beta_n] \subseteq [0,1]$.

אם f רציפה בנקודה $r \in [0,1]$ ו- $x \in S^{k-1}(0^{[k]};r)$ כלומר $|x|=r$ אז g רציפה ב- x כהרכבה של

הפונקציה הרציפה f על הפונקציה הרציפה $x \mapsto |x|$ (משפט 7.2).

לכן $\bigcup_{r \in \text{cont}(f)} S^{k-1}(0^{[k-1]};r) \subseteq \text{cont}(g)$

ומכאן שמתקיים:

$$B^k(0^{[k]};1) \setminus \text{cont}(g) \subseteq \bigcup_{r \in [0,1] \setminus \text{cont}(f)} S^{k-1}(0^{[k-1]};r)$$

כמוכן $[0,1] \setminus \text{cont}(f) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n]$ ומכך נקבל שמתקיים:

$$B^k(0^{[k]}; 1) \setminus \text{cont}(g) \subseteq \bigcup_{r \in [0,1] \setminus \text{cont}(f)} S^{k-1}(0^{[k-1]}; r) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r \in [\alpha_n, \beta_n]} S^{k-1}(0^{[k-1]}; r) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

$$K_n = \bigcup_{r \in [\alpha_n, \beta_n]} S^{k-1}(0^{[k-1]}; r) = \bar{B}^k(0^{[k-1]}; \beta_n) \setminus B^k(0^{[k-1]}; \alpha_n) \quad \text{כאשר:}$$

אעיר שמאחר שיתכן $\alpha_n = 0$ ובמקרה זה לא קיים כדור שרדיוסו α_n , נאמץ לצורך פתרון זה את

הסימון $B^k(0^{[k-1]}; 0) = \emptyset$ (כלומר "כדור פתוח שרדיוסו 0 הוא הקבוצה הריקה), ובמקרה זה

$$K_n = \bar{B}^k(0^{[k-1]}; \beta_n) \quad \text{הוא כדור.}$$

נמצא אוסף בן מניה של תיבות סגורות ומישרות שאיחודן מכיל את $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ ושסכום נפחיהן קטן

מ' ε . ראשית נשים לב שלפי חלק ב של טענה 18.ג.9, דוגמה 16.ד.9 ודוגמה 31.ו.9 מתקיים:

$$\text{vol}_k(K_n) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)} \cdot (\beta_n^k - \alpha_n^k)$$

אם $0 \leq \alpha < \beta$ אז $\beta^k - \alpha^k \leq k(\beta - \alpha)\beta^{k-1}$. נוכיח עובדה זאת בהמשך.

לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\beta_n \leq 1$ ולכן:

$$\text{vol}_k(K_n) \leq k \cdot \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)} \cdot (\beta_n - \alpha_n) \beta_n^{k-1} \leq k \cdot \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)} \cdot (\beta_n - \alpha_n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}_k(K_n) \leq k \cdot \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n) < k \cdot \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)}{k \cdot \pi^{\frac{k}{2}}} \cdot \varepsilon = \varepsilon \quad \text{אז:}$$

עדיין לא הגענו למטרתנו. מצאנו אוסף בן מניה של קבוצות $\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ שאיחודן מכיל את

$K \setminus \text{cont}(g)$ ושסכום נפחיהן קטן מ' ε , אלא שקבוצות אלה אינן תיבות סגורות ומישרות.

נמצא עכשיו אוסף בן מניה של תיבות סגורות ומישרות שמכילות את $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ ושסכום נפחיהן גם

הוא קטן מ' ε . לנוחיות נסמן $c = \frac{\varepsilon}{\sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}_k(K_n)}$. אז $c > 1$. נסמן גם $B = [-1, 1]^k$. זאת תיבה סגורה

$$K_n = \bar{B}^k(0^{[k-1]}; \beta_n) \setminus B^k(0^{[k-1]}; \alpha_n) \subseteq \bar{B}^k(0^{[k-1]}; 1) \subseteq B \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{מישרת ולכל}$$

(כי $\beta_n \leq 1$). הקבוצה K_n בעלת נפח, ולכן הפונקציה המציינת χ_{K_n} אינטגרבילית בתיבה B

$$\text{vol}_k(K_n) = \int_{K_n} 1 = \int_B \chi_{K_n} = \inf_{P \in \hat{\Pi}(B)} \bar{S}_P(\chi_{K_n}) \quad \text{ומתקיים:}$$

$$\text{vol}_k(K_n) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)} \cdot (\beta_n^k - \alpha_n^k) > 0 \quad \text{מאחר ש-} 0 \leq \alpha_n < \beta_n \text{ מתקיים}$$

$$\inf_{P \in \hat{\Pi}(B)} \bar{S}_P(\chi_{K_n}) = \text{vol}_k(K_n) < c \cdot \text{vol}_k(K_n) \quad \text{ולכן:}$$

$$\left\{ \bar{S}_P(\chi_{K_n}) \mid P \in \hat{\Pi}(B) \right\} \quad \text{פירוש הדבר ש-} c \cdot \text{vol}_k(K_n) \text{ אינו חסם מלרע של הקבוצה}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{S}_{P_n}(\chi_{K_n}) < c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}_k(K_n) = \varepsilon \quad \text{ולכן יש } P_n \in \hat{\Pi}(B) \text{ כך ש-} \bar{S}_{P_n}(\chi_{K_n}) < c \cdot \text{vol}_k(K_n) \text{ או:}$$

$$\bar{S}_{P_n}(\chi_{K_n}) = \sum_{\Gamma \in P_n} \sup \left\{ \chi_{K_n}(x) \mid x \in \Gamma \right\} \cdot \text{vol}_k \Gamma \quad \text{כעת נתבונן בסכומי דארבו:}$$

$$\Gamma \cap K_n = \emptyset \text{ ואחרת } x \in K_n \text{ כך ש-} x \in \Gamma \text{ אם ורק אם } \sup \left\{ \chi_{K_n}(x) \mid x \in \Gamma \right\} = 1 \text{ מתקיים}$$

$$Q_n = \left\{ \Gamma \in P_n \mid \Gamma \cap K_n \neq \emptyset \right\} \quad \text{ומתקיים } \sup \left\{ \chi_{K_n}(x) \mid x \in \Gamma \right\} = 0 \text{ נסמן:}$$

$$\bar{S}_{P_n}(\chi_{K_n}) = \sum_{\Gamma \in P_n} \sup \left\{ \chi_{K_n}(x) \mid x \in \Gamma \right\} \cdot \text{vol}_k \Gamma = \sum_{\Gamma \in Q_n} \text{vol}_k \Gamma \quad \text{אז } K_n \subseteq \bigcup_{\Gamma \in Q_n} \Gamma \text{ ומתקיים}$$

$$\text{לבסוף, נסמן } Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n. \text{ זהו איחוד בר־מניה של קבוצות סופיות, ולכן זאת קבוצה בת־מניה של}$$

$$B^k(0^{[k]}; 1) \setminus \text{cont}(g) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\Gamma \in Q_n} \Gamma = \bigcup_{\Gamma \in Q} \Gamma \quad \text{תיבות סגורות מיושרות. מתקיים}$$

$$B^k(0^{[k]}; 1) \setminus \text{cont}(g) \text{ מוכלת באיחוד האוסף הבר־מניה הזה של תיבות סגורות ומיושרות. כלומר}$$

$$\sum_{\Gamma \in Q} \text{vol}_k \Gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\Gamma \in Q_n} \text{vol}_k \Gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{S}_{P_n}(\chi_{K_n}) < \varepsilon \quad \text{לבסוף נבדוק את סכום נפחי התיבות:}$$

$$\text{עבור } \varepsilon > 0 \text{ כלשהו מצאנו אוסף בן מניה של תיבות סגורות מיושרות שסכום נפחיהן קטן מ־} \varepsilon$$

$$\text{ואשר איחודן מכיל את } B^k(0^{[k]}; 1) \setminus \text{cont}(g), \text{ ולכן לפי קריטריון לבג לאינטגרביליות הפונקציה}$$

$$g \text{ אינטגרבילית בקבוצה } B^k(0^{[k]}; 1).$$

$$\text{נותר עוד חוב קטן לסיום ההוכחה: להראות שאם } 0 \leq \alpha < \beta \text{ אז } \beta^k - \alpha^k \leq k(\beta - \alpha)\beta^{k-1}.$$

$$\text{יש דרכים רבות להראות זאת. אחת קצרה בעזרת זהות אלגברית:}$$

$$\beta^k - \alpha^k = (\beta - \alpha) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i \beta^{k-1-i} \leq (\beta - \alpha) \sum_{i=0}^{k-1} \beta^i \beta^{k-1-i} = (\beta - \alpha) \sum_{i=0}^{k-1} \beta^{k-1} = k(\beta - \alpha) \beta^{k-1}$$

$$\text{דרך אחרת שניתן לישם במקרים כלליים יותר: נסמן } \varphi(t) = t^k. \text{ זאת פונקציה גזירה ולפי משפט}$$

$$\frac{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}{\beta - \alpha} = \varphi'(c) \quad \text{ערך הביניים של לגרנז' יש } c \in (\alpha, \beta) \text{ עבורו מתקיים:}$$

$$\beta^k - \alpha^k = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = \varphi'(c)(\beta - \alpha) = kc^{k-1}(\beta - \alpha) \leq k(\beta - \alpha)\beta^{k-1} \quad \text{אז:}$$

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי A קבוצה בעלת נפח ב- $\mathbf{R}^k$ ותהי f פונקציה חלקית מ- $\mathbf{R}^k$ ל- $\mathbf{R}$ שרציפה בסביבה של $0^{[k]}$.

כל $\lambda > 0$ נסמן $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$. הוכיחו ש- λA היא קבוצה בעלת נפח ושם $\text{vol}_k(A) \neq 0$

$$\frac{1}{\lambda^k \text{vol}_k(A)} \int_{\lambda A} f \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} f(0^{[k]}) \quad \text{אז:}$$

פתרון

הפונקציה $x \mapsto \lambda x$ היא פונקציה אפינית (וגם לינארית) ו- A היא קבוצה בעלת נפח, ולכן לפי חלק ג של שאלה 25.ד.9 הקבוצה λA היא בעלת נפח, עבור כל λ ממשי חיובי.

הקבוצה A חסומה ולכן יש $R > 0$ כך ש- $A \subseteq B^k(0; R)$. אז:

הפונקציה f רציפה בסביבה של 0 ובפרט יש $r > 0$ כך שהיא רציפה בכדור הסגור $\bar{B}^k(0; r)$ ובפרט היא חסומה בו, לפי משפט וויירשטראס.

אם $0 < \lambda R \leq r$ אז $\lambda A \subseteq \bar{B}^k(0; r)$ ולכן f רציפה וחסומה בקבוצה λA שהיא בעלת נפח,

ומטענה 23.ג.9 נובע ש- f אינטגרבילית בקבוצה λA .

נעבור לחישוב הגבול. יהי $\varepsilon > 0$ (כך מתחילות רבות מאגדות הנסיך אינפני).

לפי הנתון f רציפה ב- 0 ולכן יש $0 < \delta \leq r$ כך שאם $x \in B(0; \delta)$ אז $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$,

ובפרט:

אם $0 < \lambda \leq \frac{\delta}{R}$ אז $\lambda R \leq \delta$ ולכן

ולכן f אינטגרבילית בקבוצה λA ולכל $x \in \lambda A$ מתקיים:

לכן לפי חלק א של שאלה 9.10 ג. (מונוטוניות האינטגרל) מתקיים:

$$\int_{\lambda A} (f(0) - \varepsilon) dx_1 dx_2 \dots dx_k \leq \int_{\lambda A} f \leq \int_{\lambda A} (f(0) + \varepsilon) dx_1 dx_2 \dots dx_k$$

$$(f(0) - \varepsilon) \text{vol}_k(\lambda A) \leq \int_{\lambda A} f \leq (f(0) + \varepsilon) \text{vol}_k(\lambda A) \quad \text{דהיינו:}$$

לפי מסקנה 4.1.9 (עם $M = \lambda I_{k \times k}$ ו- $b = 0^{[k]}$) מתקיים:

$$\text{vol}_k(\lambda A) = |\det \lambda I_{k \times k}| \text{vol}_k(A) = \lambda^k \text{vol}_k(A)$$

$$(f(0) - \varepsilon) \lambda^k \text{vol}_k(A) \leq \int_{\lambda A} f \leq (f(0) + \varepsilon) \lambda^k \text{vol}_k(A) \quad \text{לכן}$$

$$f(0) - \varepsilon \leq \frac{1}{\lambda^k \text{vol}_k(A)} \int_{\lambda A} f \leq f(0) + \varepsilon \quad \text{ומכאן}$$

$$\left|\frac{1}{\lambda^k \operatorname{vol}_k(A)} \int_{\lambda A} f - f(0)\right| \leq \varepsilon$$

$$\frac{1}{\lambda^k \operatorname{vol}_k(A)} \int_{\lambda A} f \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} f(0)$$

כלומר אם $0 < \lambda \leq \frac{\delta}{R}$ אז

ולכן:

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי $\varphi: B(0^{[k]}; 1) \rightarrow \mathbf{R}^k$ דיפאומורפיזם ונניח שמתקיים $\varphi(B(0^{[k]}; 1)) = B(0^{[k]}; 1)$.
הראו שיש $x \in B(0^{[k]}; 1)$ כך ש- $|\det J\varphi_x| = 1$.

פתרון

הפונקציה $J\varphi: x \mapsto J\varphi_x$ רציפה בקבוצה הפתוחה $U = B(0^{[k]}; 1)$ כי φ היא דיפאומורפיזם.
גם הפונקציות $x \mapsto |x|$ ו- $x \mapsto |\det J\varphi_x|$ רציפות לכל x ולכן ההרכבה $x \mapsto |\det J\varphi_x|$ היא פונקציה רציפה מ- U ל- $(0, \infty)$ (0 אינו בתמונת הפונקציה כי φ דיפאומורפיזם ולכן $J\varphi_x$ מטריצה הפיכה).
הקבוצה U קשורה מסילתית ולכן (לפי טענה 2.ט.2) תמונתה על ידי הפונקציה הזאת היא תת-קבוצה קשורה מסילתית של $(0, \infty)$. לפי טענה 2.ט.9 היא תת-קבוצה קמורה של $(0, \infty)$ ולפי הערה 15.ג.1 היא בהכרח קטע או קרן או קבוצה בת איבר יחיד).
נניח בשלילה שהטענה שיש להוכיח אינה נכונה, כלומר אין $x \in U$ כך ש- $|\det J\varphi_x| = 1$. אז לא יתכן שיש $a, b \in U$ כך ש- $|\det J\varphi_a| < 1$ ו- $|\det J\varphi_b| > 1$, כי מקמירותה של תמונת $x \mapsto |\det J\varphi_x|$ נובע שהיא מכילה את הקטע $[|\det J\varphi_a|, |\det J\varphi_b|]$, אבל 1 הוא איבר של הקטע הזה ואינו בתמונת הפונקציה $x \mapsto |\det J\varphi_x|$. לכן בהכרח מתקיים אחד מבין:
 $\{|\det J\varphi_x| \mid x \in U\} \subseteq (0, 1)$
 $\{|\det J\varphi_x| \mid x \in U\} \subseteq (1, \infty)$
ראשית נראה למשל שהמקרה הראשון לא יתכן, ואחר כך נראה שגם המקרה השני לא יתכן, ולכן הנחת השלילה שגויה, והטענה שיש להוכיח נכונה.
ובכן, נניח ש- $\{|\det J\varphi_x| \mid x \in U\} \subseteq (0, 1)$. תהי $K \subseteq U$ סגורה, חסומה ובעלת נפח חיובי.
הפונקציה $x \mapsto |\det J\varphi_x|$ רציפה ב- U ולכן היא רציפה ב- K ולפי משפט ווירשטראס יש לה מקסימום M ב- K . כיוון שתמונתה מוכלת בקטע $(0, 1)$ בהכרח $0 < M < 1$.
אז:
$$\text{vol}_k(\varphi(K)) = \int_K |\det J\varphi| \leq \int_K M = M \cdot \text{vol}_k(K) < \text{vol}_k(K)$$

לכן גם:
$$\text{vol}_k(U \setminus \varphi(K)) = \text{vol}_k(U) - \text{vol}_k(\varphi(K)) > \text{vol}_k(U) - \text{vol}_k(K) = \text{vol}_k(U \setminus K)$$

אבל φ חד-חד ערכית (בתור דיפאומורפיזם) ונתון $\varphi(U) = U$ ולכן:
$$\varphi(U \setminus K) = \varphi(U) \setminus \varphi(K) = U \setminus \varphi(K)$$

ומכאן:
$$\text{vol}_k(\varphi(U \setminus K)) > \text{vol}_k(U \setminus K)$$

כדי לקבל סתירה נבחר קבוצה מסויימת: $K = \bar{B}(0; \frac{1}{2})$. אז $U \setminus K = B(0; 1) \setminus \bar{B}(0; \frac{1}{2})$ והקבוצות $U \setminus K = \bar{B}(0; 1 - \frac{1}{n}) \setminus B(0; \frac{1}{2} + \frac{1}{n})$ מהוות סדרת קבוצות בעלות נפח ב- $\mathbf{R}^k$ שעולה לקבוצה $U \setminus K$.
לפי מסקנה 9.ה.32 מתקיים:
$$\text{vol}_k(K_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{vol}_k(U \setminus K)$$

בעזרת טענה 21.9.21 נסיק שהקבוצות $\varphi(K_n)$ מהוות סדרת קבוצות בעלות נפח ב- $\mathbf{R}^k$ שעולה

$$\text{vol}_k(\varphi(K_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{vol}_k(\varphi(U \setminus K)) \quad \text{לקבוצה } \varphi(U \setminus K), \text{ ולכן}$$

אבל כפי שראינו קודם, מאחר שכל אחת מהקבוצות K_n (עבור $n > 4$) היא תת-קבוצה סגורה,

חסומה ובעלת נפח חיובי של U , מתקיים $\text{vol}_k(\varphi(K_n)) < \text{vol}_k(K_n)$ לכל $n > 4$, ומתכונת

המונוטוניות של הגבול נובע $\text{vol}_k(\varphi(U \setminus K)) \leq \text{vol}_k(U \setminus K)$, בסתירה מה שהוכח קודם.

בכך הראינו שלא ייתכן המקרה הראשון. נראה עכשיו שלא ייתכן גם המקרה השני. אפשר

להראות זאת בדרך דומה, אך אפשר להסיק זאת ממה שכבר הוכח: ובכן, כעת אנו מניחים

שמתקיים $\{ \|\det J\varphi_x\| \mid x \in U \} \subseteq (1, \infty)$. הפונקציה $\varphi: U \rightarrow U$ היא דיפאומורפיזם, ולפי אבחנה

13.9.21 גם $\varphi^{-1}: U \rightarrow U$ היא דיפאומורפיזם. הפונקציה $\varphi \circ \varphi^{-1}: U \rightarrow U$ היא פונקציית הזהות.

מטריצת היעקוביאן של פונקציית הזהות היא מטריצת היחידה.

לפי כלל השרשרת בגרסה המטריציאית (מסקנה 2.9.2) מתקיים בכל $x \in U$ השוויון

$$I_{k \times k} = J(\varphi \circ \varphi^{-1})_x = J\varphi_{\varphi^{-1}(x)} J(\varphi^{-1})_x$$

$$1 = |\det I_{k \times k}| = \left| \det \left(J\varphi_{\varphi^{-1}(x)} J(\varphi^{-1})_x \right) \right| = \left| \det J\varphi_{\varphi^{-1}(x)} \right| \cdot \left| \det J(\varphi^{-1})_x \right| \quad \text{לכן:}$$

$$\left| \det J(\varphi^{-1})_x \right| = \frac{1}{\left| \det J\varphi_{\varphi^{-1}(x)} \right|} < \frac{1}{1} = 1 \quad \text{אז לכל } x \in U \text{ מתקיים}$$

אז $\varphi^{-1}: U \rightarrow U$ הוא דיפאומורפיזם שעבורו מתקיים המקרה הראשון, אבל הוכחנו שמקרה זה

לא ייתכן עבור אף דיפאומורפיזם, ובפרט עבור φ^{-1} . בכך הראינו ששני המקרים מובילים

לסתירה, ולכן הנחת השלילה אינה נכונה, כלומר הטענה שיש להוכיח נכונה.

שאלה 4 (20 נקודות)

א. תהי A קבוצה בעלת נפח ב- $\mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי:

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y) + \sin^2(\pi z)}$$

הוכיחו ש- f אינטגרלית בקבוצה $A \setminus \mathbb{Z}^3$ או לחילופין האינטגרל המוכלל של f בקבוצה

$$A \setminus \mathbb{Z}^3 \text{ מתכנס. (מומלץ לבחון קודם סביבה נחמדה של הראשית כגון } B^3(0;1) \text{ או } [-1,1]^3).$$

ב. תהי A קבוצה בעלת שטח ב- $\mathbb{R}^2$ ותהי $f: \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי:

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y)}$$

הוכיחו שאם A היא סביבה של $(0,0)$ אז האינטגרל המוכלל של f בקבוצה $A \setminus \mathbb{Z}^2$ אינו מתכנס.

פתרון סעיף א

הקבוצה $\mathbb{Z}^3$ היא קבוצה צנומה, והקבוצה A היא בעלת נפח, ולכן גם $A \setminus \mathbb{Z}^3$ בעלת נפח. הפונקציה f היא פונקציה יסודית, ולכן היא רציפה בתחום הגדרתה, כלומר בכל נקודה שבה המכנה אינו אפס. המכנה הוא אפס אם ורק אם $\sin \pi x = \sin \pi y = \sin \pi z = 0$ וזה קורה אם ורק אם שלושת המספרים x, y, z שלמים, כלומר אם ורק אם $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$.

לכן f רציפה ב- $A \setminus \mathbb{Z}^3$, והיא אינטגרלית בקבוצה זאת אם ורק אם היא חסומה בקבוצה. נותר להראות שאם היא אינה חסומה בקבוצה, אז האינטגרל המוכלל שלה בקבוצה מתכנס. כיוון שהיא פונקציה חיובית (המונה והמכנה חיוביים) הרי לפי טענה 6.9.6 די להראות שיש סדרת קירוב חסומה לאינטגרל של f בקבוצה $A \setminus \mathbb{Z}^3$.

נעשה זאת קודם עם הקבוצה $B = B((0,0,0); \frac{1}{2})$. מתקיים בבירור $B \setminus \mathbb{Z}^3 = B \setminus \{(0,0,0)\}$.

אם $0 < x < \frac{1}{2}$ אז אפשר באמצעים פשוטים של אינפי 1 לראות ש- $2x < \sin \pi x < \pi x$ ¹.

אם $(x, y, z) \in B \setminus \{(0,0,0)\}$ אז $x, y, z \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ומכאן נקבל:

$$\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y) + \sin^2(\pi z) \geq (2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2 = 4(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$f(x, y, z) \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

¹ נסמן $\varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$ ו- $\varphi(0) = 1$ או $\varphi'(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2}$ עבור $t > 0$, והפונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}$. המונה הוא פונקציה גזירה $\mu(t) = t \cos t - \sin t$ ומתקיים $\mu'(t) = -t \sin t < 0$ עבור $t \in (0, \pi)$ ולכן המונה הוא פונקציה יורדת ומתקיים $\mu(t) < \mu(0) = 0$ עבור $t \in (0, \pi)$. אז $\varphi'(t) = \frac{\mu(t)}{t^2} < 0$ ו- φ פונקציה יורדת ב- $[0, \pi]$. בפרט לכל $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ מתקיים $\varphi(0) > \varphi(t) > \varphi(\frac{\pi}{2})$ ולכן $1 > \frac{\sin t}{t} > \frac{2}{\pi}$. עבור $0 < x < \frac{1}{2}$ מתקיים $\pi x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ולכן $1 > \frac{\sin \pi x}{\pi x} > \frac{2}{\pi}$ ו- $\pi x > \sin \pi x > 2x$.

הקבוצות $A_n = B \setminus B((0,0,0); \frac{1}{n})$ הן סדרת קבוצות בעלות נפח שעולה לקבוצה $B \setminus \{(0,0,0)\}$.

$$0 < f(x, y, z) \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{1}{4} \cdot n^2 \quad \text{לכל } (x, y, z) \in A_n \text{ מתקיים}$$

ולכן f היא פונקציה רציפה וחסומה בקבוצה A_n , ולכן אינטגרלית ב- A_n . אז סדרת

$$\text{האינטגרלים} \left(\int_{A_n} f \right)_{n=1}^{\infty} \text{ היא סדרת קירוב לאינטגרל של } f \text{ בקבוצה } B \setminus \{(0,0,0)\}.$$

$$\int_{A_n} f \leq \frac{1}{4} \iiint_{A_n} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz \quad \text{מתקיים: (10.9 ג.10)}$$

את האינטגרל באגף ימין של האישוויון האחרון נחשב בקלות בעזרת 24.9 ז.24, כאשר נשים לב שאם

$$(x, y, z) = (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) \quad \text{אז } x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \text{ לכן:}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{A_n} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \iiint_{[\frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]} \frac{1}{r^2} r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi = \iiint_{[\frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]} \sin \phi dr d\theta d\phi \\ &\leq \iiint_{[0, \frac{1}{2}] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]} \sin \phi dr d\theta d\phi = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dr \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\theta \cdot \int_0^{\pi} \sin \phi d\phi = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 2 = 2\pi \end{aligned}$$

קבלנו אם כן ש- $0 \leq \int_{A_n} f \leq \frac{\pi}{2}$ לכל $n \in \mathbf{N}$ כלומר סדרת הקירוב דלעיל חסומה, ולפי טענה 6.9 נ.

האינטגרל של f מתכנס בקבוצה $B \setminus \{(0,0,0)\}$.

נתבונן עתה בנקודה $p \in \mathbf{Z}^3$ כלשהי, ובהזזה $B + p = B(p; \frac{1}{2})$.

במקרה זה $(B + p) \setminus \mathbf{Z}^3 = (B + p) \setminus \{p\}$.

לכל $t \in \mathbf{R}$ מתקיים $\sin^2(t + \pi) = \sin^2 t$ ולכן לכל $x \in \mathbf{R}^3 \setminus \mathbf{Z}^3$ מתקיים $f(x + p) = f(x)$.

משאלה 9.9 ג.9 נקבל ש- $\int_{A_n+p} f = \int_{A_n} f$ ולכן הסדרה $\left(\int_{A_n+p} f \right)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה, וזאת סדרת

קירוב לאינטגרל של f בקבוצה $(B + p) \setminus \{p\}$ כי הקבוצות A_{n+p} מהוות סדרת קבוצות שעולה לקבוצה $(B + p) \setminus \{p\}$, ומכאן שהאינטגרל של f בקבוצה $(B + p) \setminus \{p\}$ מתכנס.

כעת תהי A קבוצה בעלת נפח כלשהי ב- $\mathbf{R}^3$. היא חסומה ולכן יש כדור $B((0,0,0); R)$ שמכיל

אותה. נסמן $C = B((0,0,0); R + \frac{\sqrt{3}}{2})$, וכן נסמן $P = \mathbf{Z}^3 \cap C$. נסמן $U = \bigcup_{p \in P} (B + p)$.

נשים לב ש- $U = \bigcup_{p \in P} (B + p)$ הוא איחוד של קבוצות זרות, שכן הקבוצות $(B + p) \setminus \{p\}$ הן

כדורים פתוחים שרדיוסיהם $\frac{1}{2}$ והמרחק בין מרכזי כל שניים מהם לפחות 1. כמוכן U היא

קבוצה בעלת נפח כאיחוד סופי של קבוצות בעלות נפח. לכן גם $A \cup U$ בעלת נפח.

תהי $(x, y, z) \in A \setminus U$. תהי $p = (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ כך ש- $y \in [b - \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2}]$, $x \in [a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}]$ ו-

$$z \in [c - \frac{1}{2}, c + \frac{1}{2}] \text{ או}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y + \sin^2 \pi z &= \sin^2 \pi(x-a) + \sin^2 \pi(y-b) + \sin^2 \pi(z-c) \\ &\geq 4((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2) \end{aligned}$$

$$0 < f(x, y, z) \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \quad \text{ולכן:}$$

$$\begin{aligned} |p| &= |(x, y, z) + (a-x, b-y, c-z)| \leq |(x, y, z)| + |(a-x, b-y, c-z)| \\ &= |(x, y, z)| + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < R + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = R + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad \text{מתקיים:}$$

ולכן $p \in C$. או $p \in \mathbb{Z}^3 \cap C = P$. אבל $(x, y, z) \notin U$ ולכן $(x, y, z) \notin B + p = B(p; \frac{1}{2})$. לכן

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = |(x, y, z) - p| \geq \frac{1}{2} \quad \text{ולכן:}$$

$$0 < f(x, y, z) \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \leq \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$$

אז f רציפה וחסומה בקבוצה $A \setminus U$ שהיא בעלת נפח, ולכן f אינטגרלית ב- $A \setminus U$.

עכשיו אנחנו מוכנים לסיום: נסמן $K_n = (A \setminus U) \cup \bigcup_{p \in P} A \cap (A_n + p)$. זאת סדרת קבוצות שעולה

$$(A \setminus U) \cup \bigcup_{p \in P} A \cap (B \setminus \{(0,0,0)\} + p) = (A \setminus U) \cup A \cap \bigcup_{p \in P} (B + p) \setminus \{p\} = A \setminus \mathbb{Z}^3 \quad \text{לקבוצה:}$$

כל K_n נתונה כאיחוד של מספר סופי של קבוצות בעלות נפח שזרות זו לזו, ו- f אינטגרלית

$$\begin{aligned} \int_{K_n} f &= \int_{A \setminus U} f + \sum_{p \in P} \int_{A \cap (A_n + p)} f \leq \int_{A \setminus U} f + \sum_{p \in P} \int_{A_n + p} f \\ &= \int_{A \setminus U} f + \sum_{p \in P} \int_{A_n} f = \int_{A \setminus U} f + |P| \cdot \int_{A_n} f \leq \int_{A \setminus U} f + |P| \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad \text{בהן, ומתקיים:}$$

קיבלנו סדרת קירוב חסומה לאינטגרל של f ב- $A \setminus \mathbb{Z}^3$ ולכן האינטגרל של f ב- $A \setminus \mathbb{Z}^3$ מתכנס.

פתרון סעיף ב

אם A היא סביבה של $(0,0)$ אז יש כדור $B = B((0,0); r) \subseteq A$. נוכל גם להניח ש- $r < \frac{1}{2}$. אם

$$4(x^2 + y^2) < \sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y \leq \pi^2(x^2 + y^2) \quad \text{ולכן: } |y| < \frac{1}{2} \text{ וגם } |x| < \frac{1}{2} \text{ אז } (x, y) \in B \setminus \{(0,0)\}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y)} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4} \cdot g(x, y) \quad \text{אז:}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \quad \text{כאשר } g: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ מוגדרת על ידי}$$

נניח בשלילה שהאינטגרל של f מתכנס ב- $A \setminus \mathbb{Z}^2$. אז יש לו סדרת קירוב חסומה

$$\left(\int_{A_n} f \right)_{n=1}^{\infty}$$

אז $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קבוצות בעלות שטח שעולה לקבוצה $A \setminus \mathbb{Z}^2$. בפרט:

$$A \setminus \mathbb{Z}^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

לכן:

$$B \setminus \{(0,0)\} = B \cap (A \setminus \mathbb{Z}^2) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B \cap A_n$$

ולכן הסדרה $(B \cap A_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קבוצות בעלות שטח שעולה לקבוצה $B \setminus \{(0,0)\}$.

לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$0 \leq \int_{B \cap A_n} g \leq 4 \int_{B \cap A_n} f \leq 4 \int_{A_n} f$$

וכיוון שהסדרה $\left(\int_{A_n} f \right)_{n=1}^{\infty}$ חסומה גם הסדרה $\left(\int_{B \cap A_n} g \right)_{n=1}^{\infty}$ חסומה והיא סדרת קירוב לאינטגרל

של g בקבוצה $B \setminus \{(0,0)\}$. כיוו ש- g רציפה ואי-שלילית בקבוצה זאת הרי לפי טענה 6.ח.9

האינטגרל המוכלל של g בקבוצה $B \setminus \{(0,0)\}$ מתכנס. נראה עכשיו שהוא מתבדר על ידי הצגת

סדרת קירוב אחרת שאינה חסומה (ולכן אינה מתכנסת). נסמן $B_n = B \setminus B((0,0); \frac{1}{n})$. אז:

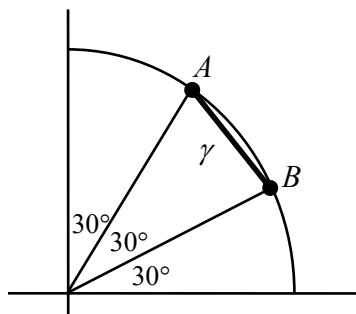
$$\begin{aligned} \int_{B_n} g &= \iint_{B((0,0);r) \setminus B((0,0);\frac{1}{n})} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \iint_{[\frac{1}{n}, r] \times [0, 2\pi]} \frac{1}{r^2} \cdot r dr d\theta = \int_{\frac{1}{n}}^r \frac{dr}{r} \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi \left(\ln r - \ln \frac{1}{n} \right) = 2\pi (\ln r + \ln n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

כאשר חישוב האינטגרל בעזרת טענה 36.ז.9.

שאלה 5 (20 נקודות)

נסמן:

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \quad Q(x, y) = \frac{x}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}}$$



חשבו את $\int_{\gamma} Pdx + Qdy$ כאשר γ היא מסילה פשוטה

שתמונתה הקטע הישר AB באיור שלפניכם (נעם התחלה ב- A וסיום ב- B). היעזרו במשפט גרין כדי להמיר את החישוב בחישוב אינטגרל לאורך קשת המעגל (רדיוס המעגל הוא R).

פתרון

γ מסילה פשוטה שתמונתה קטע, ולכן אורכה סופי (על פי שאלה 8.ב.13 ומסקנה 8.ב.21). נוכל אם כן להניח ללא הגבלת הכלליות ש- γ מסילה פשוטה סדירה (ראו חלק א של טענה 8.ו.15). תהי ψ מסילה פשוטה סדירה שתמונתה הקשת (הקצרה) של המעגל מ- B ל- A . למשל אפשר לקחת:

$$\psi: \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (R \cos t, R \sin t)$$

נשים לב שמתקיים:

$$A = \psi\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(R \cos \frac{\pi}{3}, R \sin \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}R, \frac{\sqrt{3}}{2}R\right)$$

$$B = \psi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(R \cos \frac{\pi}{6}, R \sin \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R, \frac{1}{2}R\right)$$

שתי הנקודות נמצאות על הישר שמשוואתו $x + y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}R$.

יש קבוצה סגורה וחסומה K שהמסילות γ ו- ψ מקיימות יחד איתה את הנחות משפט גרין. זאת

הקבוצה:

$$K = \left\{ (x, y) \mid x + y \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}R, x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}$$

נפרט קצת (השלימו את הפרטים):

הקבוצה K חסומה (מוכלת בכדור $\bar{B}((0,0); R)$) וסגורה לפי חלק א של מסקנה 25.ד.2.

א. לפי ההנחות דלעיל שתי המסילות פשוטות וגזירות ברציפות (ואף סדירות).

ב. הקבוצה K היא חיתוך של חצי המישור $H = \left\{ (x, y) \mid x + y \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}R \right\}$ והכדור $\bar{B}((0,0); R)$.

אפשר לבדוק שחצי המישור H שוכן משמאל למסילה γ והכדור שוכן משמאל למסילה ψ

(נובע מדוגמה 9.ט.9) ומשני אלה נובע ש- K שוכנת לשמאלן של המסילות γ ו- ψ .

ג. משאלה 8.ט.9 נובע ש- $\partial K \supseteq \text{Im } \gamma \cup \text{Im } \psi$.

מכך ש- $\partial K \subseteq K$ (כי K סגורה) ומחלק ב של טענה 25.ד.2 נקבל

$$\partial K \subseteq K \cap \left(\left\{ (x, y) \mid x + y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}R^2 \right\} \cup \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = R^2 \right\} \right) = \text{Im } \gamma \cup \text{Im } \psi$$

ולכן $\partial K = \text{Im } \gamma \cup \text{Im } \psi$.

ד. הנקודות היחידות המשותפות לשתי המסילות הן קצותיהן: A ו- B (אלה הנקודות היחידות המשותפות לישר והמעגל שמכילים את תמונות φ ו- ψ , בהתאמה).

$$\iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \int_{\varphi} Pdx + Qdy + \int_{\psi} Pdx + Qdy \quad \text{אם כך, לפי משפט גרין (17.ט.9) מתקיים}$$

$$\int_{\varphi} Pdx + Qdy = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} - \int_{\psi} Pdx + Qdy \quad \text{ולכן:}$$

נחשב את שני האינטגרלים שבאגף ימין ומהם נקבל את האינטגרל המבוקש (שבאגף שמאל).
חישוב האינטגרל המסילתי לאורך קשת המעגל ישיר:

$$\int_{\psi} Pdx + Qdy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (P(\psi(t)), Q(\psi(t))) \cdot \dot{\psi}(t) dt$$

$$P(\psi(t)) = -\frac{R \sin t}{(R \cos t)^2 \sqrt{(R \cos t)^2 + (R \sin t)^2}} = -\frac{\sin t}{R^2 \cos^2 t} \quad \text{נחשב בנפרד:}$$

$$Q(\psi(t)) = \frac{R \cos t}{(R \sin t)^2 \sqrt{(R \cos t)^2 + (R \sin t)^2}} = \frac{\cos t}{R^2 \sin^2 t}$$

$$\dot{\psi}(t) = (-R \sin t, R \cos t)$$

ונמשיך בחישוב האינטגרל המסילתי:

$$\begin{aligned} \int_{\psi} Pdx + Qdy &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{\sin t}{R^2 \cos^2 t}, \frac{\cos t}{R^2 \sin^2 t} \right) \cdot (-R \sin t, R \cos t) dt \\ &= \frac{1}{R} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \right) dt = \frac{1}{R} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} + \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} \right) dt \\ &= \frac{1}{R} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{1}{\sin^2 t} - 2 \right) dt = \frac{1}{R} [\tan t - \cot t - 2t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{R} \left(\left(\tan \frac{\pi}{3} - \cot \frac{\pi}{3} - 2 \cdot \frac{\pi}{3} \right) - \left(\tan \frac{\pi}{6} - \cot \frac{\pi}{6} - 2 \cdot \frac{\pi}{6} \right) \right) \\ &= \frac{1}{R} \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{R} \left(2\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{4\sqrt{3}}{3R} - \frac{\pi}{3R} \end{aligned}$$

את האינטגרל הכפול נחשב בעזרת מעבר לשיעורים קוטביים במישור, דהיינו בעזרת טענה 36.ז.9:

ראשית נחשב את הנגזרות החלקיות. לשם כך נוח לסמן $r = r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = xr^{-1} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = yr^{-1} \quad \text{אז:}$$

$$P(x, y) = -x^2 yr^{-1} \quad Q(x, y) = xy^{-2} r^{-1} \quad \text{ולכן:}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y^{-2} r^{-1} - xy^{-2} r^{-2} \frac{\partial r}{\partial x} = y^{-2} r^{-1} - x^2 y^{-2} r^{-3} = y^{-2} r^{-3} (r^2 - x^2) = y^{-2} r^{-3} y^2 = r^{-3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2 r^{-1} + x^2 yr^{-2} \frac{\partial r}{\partial y} = -x^2 r^{-1} + x^2 y^2 r^{-3} = x^2 r^{-3} (-r^2 + y^2) = x^2 r^{-3} (-x^2) = -r^{-3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2r^{-3} = 2r(x, y)^{-3}$$

$$\iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 \iint_K dx dy = 2 \iint_A r(r \cos \theta, r \sin \theta)^{-3} r dr d\theta = 2 \iint_A r^{-2} dr d\theta \quad 36.ז.9 \quad \text{לכן לפי טענה}$$

כאשר $A \subseteq [0, \infty) \times [\alpha, \beta]$ כך ש- $\beta - \alpha \leq 2\pi$ וכן: $K = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) | (r, \theta) \in A\}$

לצרכינו עדיף $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}] \subseteq [\alpha, \beta]$ ולכן נבחר למשל $[\alpha, \beta] = [0, 2\pi]$. מהי הקבוצה A ?

ובכן נדרש ש- $(r, \theta) \in A$ אם ורק אם $(r, \theta) \in [0, \infty) \times [\alpha, \beta]$ וגם $(r \cos \theta, r \sin \theta) \in K$.

לפי הגדרת הקבוצה K הדרישה האחרונה שקולה לצירוף שני אישויונות:

$$\begin{cases} r \cos \theta + r \sin \theta \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2} R \\ (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 \leq R^2 \end{cases}$$

האישויון האחרון שקול ל- $r^2 \leq R^2$, ובזכות המגבלה $r \in [0, \infty)$ ל- $0 \leq r \leq R$.

צירוף של זה לאישויון הראשון נותן:

$$R \cos \theta + R \sin \theta \geq r \cos \theta + r \sin \theta \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2} R \Rightarrow \cos \theta + \sin \theta \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

מגבלה זאת על θ שקולה לכך ש- $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$. הכי פשוט לראות שזה נכון לפי האיור. פורמלית

אפשר להראות זאת למשל כך: ראשית, $\cos \theta + \sin \theta \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$, ומכאן $\cos \theta > 1 - \sin \theta \geq 0$,

וגם $\sin \theta > 1 - \cos \theta \geq 0$ ולכן $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. לכן האישויון $\cos \theta + \sin \theta \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ שקול ל-

$$(\cos \theta + \sin \theta)^2 \geq \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta \geq \frac{1+2\sqrt{3}+3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin 2\theta \geq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin 2\theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq 2\theta \leq \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

וכאשר זה מתקיים האישויון $r \cos \theta + r \sin \theta \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2} R$ שקול ל- $r \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R}{\cos \theta + \sin \theta}$

ויחד עם התנאי $0 \leq r \leq R$ נקבל: $A = \left\{ (r, \theta) \mid \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R}{\cos \theta + \sin \theta} \leq r \leq R \right\}$

אז:

$$\begin{aligned} \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= 2 \iint_A r^{-2} dr d\theta = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{\frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R}{\cos \theta + \sin \theta}}^R r^{-2} dr \right) d\theta = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\left[-\frac{1}{r} \right]_{\frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R}{\cos \theta + \sin \theta}}^R \right) d\theta \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R}{\cos \theta + \sin \theta}} \right) d\theta \\ &= \frac{2}{R} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}} (\cos \theta + \sin \theta) - 1 \right) d\theta = \frac{2}{R} \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}} \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \right) - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta = \left[\sin \theta - \cos \theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

נחשב בנפרד

$$= \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - 1$$

$$\iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2}{R} \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}} \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \right) - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{2}{R} \cdot \left((\sqrt{3}-1) - \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{ונמשיך:}$$

$$= \frac{4}{R} \cdot \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)} - \frac{\pi}{3R} = \frac{4}{R} \cdot \frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1} - \frac{\pi}{3R} = \frac{4}{R} \cdot (2-\sqrt{3}) - \frac{\pi}{3R}$$

ולבסוף:

$$\int_{\varphi} P dx + Q dy = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} - \int_{\psi} P dx + Q dy = \left(\frac{4}{R} \cdot (2-\sqrt{3}) - \frac{\pi}{3R} \right) - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3R} - \frac{\pi}{3R} \right) = \frac{24-16\sqrt{3}}{3R}$$