

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 סמסטר: 2022
 חומר הלימוד למטלה: פרק 8
 משקל המטלה: 5 נקודות
 מספר השאלות: 5
 מועד אחרון להגשה: 3.5.2022

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (20 נקודות)

תהינה $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^k$ ו- $\mu: [\alpha, \beta] \rightarrow M_{k \times l}(\mathbb{R})$ מסילות שאורכן סופי. תהי: $\psi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^l$
 $t \mapsto \varphi(t)\mu(t)$

- הוכיחו כי ψ היא מסילה שאורכה סופי. (מומלץ להיעזר במגוון משפטים).
- אם φ ו- μ הן מסילות סדירות, האם גם ψ היא מסילה סדירה?
- מרחב המטריצות $M_{k \times l}(\mathbb{R})$ מזוהה כרגיל עם המרחב האוקלידי $\mathbb{R}^{kl}$. ראו הערה 1.א.ג.

שאלה 2 (20 נקודות)

- תהי $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^k$ פונקציה בעלת התכונה: אם $\alpha \leq x < y \leq \beta$ אז $|\varphi(y) - \varphi(x)| < y - x$.
 א. הוכיחו ש- φ היא מסילה ושאורכה סופי, ומתקיים $L(\varphi) \leq \beta - \alpha$.
- הוכיחו שאם $L(\varphi) = \beta - \alpha$ ו- $[x, y] \subseteq [\alpha, \beta]$ אז $L(\varphi|_{[x, y]}) = y - x$.
- הסיקו שאם $L(\varphi) = \beta - \alpha$ אז אין קטע $[x, y] \subseteq [\alpha, \beta]$ עבורו $\varphi|_{[x, y]}$ שקולה למסילה אפינית.
 (מסילה אפינית: כזאת שהיא צמצום של פונקציה אפינית).
- הדגימו מסילה המקיימת את הנחות והשאלה ושעבורה $L(\varphi) = \beta - \alpha$.

שאלה 3 (20 נקודות)

- הגרף של הפונקציה $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ הוא תמונת מסילה פשוטה וסדירה במישור. מצאו את המרכז הגיאומטרי של מסילה זאת.
- הערה: הפונקציה הזאת נקראת קוסינוס היפרבולי, ונהוג לסמן $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- נגזרתה נקראת פונקציית הסינוס ההיפרבולי ומסומנת $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
- כל אחת משתי הפונקציות האלה היא הנגזרת של האחרת, ויש ביניהן קשרים רבים, כגון $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ פונקציה הומוגנית חיובית ממעלה -2 ותהי $F: \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbf{R}^2$ המוגדרת על ידי:

$$F(x, y) \mapsto f(x, y) \cdot (-y, x)$$

לכל מספר שלם n תהי φ_n לולאה בעלת מספר ליפוף n סביב הראשית. הוכיחו:

$$\oint_{\varphi_n} F(x, y) \cdot d(x, y) = n \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

שאלה 5 (20 נקודות)

הראו כי הפונקציה

$$F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto \frac{e^x}{x^2 + y^2} (x \sin y - y \cos y, y \sin y + x \cos y)$$

אינה שדה משמר בקבוצה: $((-2021, 2021) \times (-2021, 2021)) \setminus ([-2020, 2020] \times [-2020, 2020])$

המלצה: ראשית כדאי להראות שהפונקציה היא שדה משמר בכל קבוצה פתוחה ופשוטת־קשר בה היא מוגדרת.

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: וריאציה על $1\backslash13\backslash2021$. אפשר להוכיח ישירות מההגדרה. אפשר להשתמש באפיון של זיורדן להשתנות חסומה של רכיבי המסילה. וכמובן שהמכפלה אינה בהכרח סדירה, למשל אם, $[\alpha, \beta] = [-1, 1]$ ו- $\varphi(t) = \mu(t) = t$ אז נגזרת המכפלה היא 0 ב- $t = 0$.

לשאלה 2: מבוסס על $1\backslash16\backslash2019$.

סעיף א: מחלק ב של מטענה 1.ה.2 φ רציפה במידה שווה ולכן רציפה ב- $[\alpha, \beta]$ ולכן

היא מסילה. לכל חלוקה $T \in \Pi([\alpha, \beta])$ (בסימוני הספר) מתקיים

$$l(\varphi_T) = \sum_{i=1}^r |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| < \sum_{i=1}^r (t_i - t_{i-1}) = t_r - t_0 = \beta - \alpha$$

$$L(\varphi) = \sup_{T \in \Pi([\alpha, \beta])} l(\varphi_T) \leq \beta - \alpha \quad \text{ולכן}$$

ובפרט אורכה של φ סופי.

סעיף 999999999: מאחר שהצמצום של φ לכל קטע סגור שמוכל ב- $[\alpha, \beta]$ מקיים את

נתוני השאלה, נובע לפי סעיף א שצמצום כזה הוא מסילה שאורכה סופי, ובפרט

$$L(\varphi|_{[\alpha, x]}) \leq x - \alpha \quad L(\varphi|_{[x, y]}) \leq y - x \quad L(\varphi|_{[y, \beta]}) \leq y - \beta$$

אם נניח בשלילה ש- $L(\varphi|_{[x, y]}) \neq y - x$ אז

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= L(\varphi) = L(\varphi|_{[\alpha, x]}) + L(\varphi|_{[x, y]}) + L(\varphi|_{[y, \beta]}) \\ &< (x - \alpha) + (y - x) + (y - \beta) = \beta - \alpha \end{aligned}$$

וזאת סתירה. (היה כאן שימוש ב"קטעים מנוונים" ו"מסילה מנוונת" במקרים $x = \alpha$

או $y = \beta$, בניגוד למקובל בספר.)

סעיף ג: אם $L(\varphi) = \beta - \alpha$ ו- $[x, y] \subseteq [\alpha, \beta]$ אז $L(\varphi|_{[x, y]}) = y - x > |\varphi(y) - \varphi(x)|$

אם נניח בשלילה ש- $\varphi|_{[x, y]}$ שקולה למסילה אפינית ψ אז לפי שאלה 13.ב.8 תמונת ψ

היא הקטע שקצותיו $\varphi(x)$ ו- $\varphi(y)$ ו- $L(\psi) = |\varphi(y) - \varphi(x)|$ ולכן $L(\varphi|_{[x, y]}) > L(\psi)$

בניגוד לטענה 17.ב.8 (שמסילות שקולות הן בעלות אותו אורך).

לשאלה 3: המסילה היא $\varphi(t) = (t, f(t))$ ונגזרתה $\dot{\varphi}(t) = (1, f'(t))$ רציפה ואינה אפס, ולכן

$$\text{המסילה סדירה. אורך המסילה } L(\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\varphi}(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + f'(t)^2} dt \text{ ויש לחשבו.}$$

$$\frac{1}{L(\varphi)} \left(\int_{\alpha}^{\beta} [\varphi]_1(t) |\dot{\varphi}(t)| dt, \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi]_1(t) |\dot{\varphi}(t)| dt \right) \quad \text{המרכז הגיאומטרי הוא :}$$

$$= \frac{1}{L(\varphi)} \left(\int_{\alpha}^{\beta} t \sqrt{1+f'(t)^2} dt, \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \sqrt{1+f'(t)^2} dt \right)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+f'(t)^2} &= \sqrt{1+\sinh^2 t} = \sqrt{1+\frac{(e^t - e^{-t})^2}{4}} = \sqrt{\frac{4+e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}} & \text{לחישוב :} \\ &= \sqrt{\frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4}} = \sqrt{\frac{(e^t + e^{-t})^2}{4}} = \sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t \end{aligned}$$

$$L(\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+f'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \cosh t dt = \sinh \beta - \sinh \alpha = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta} - e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \quad \text{אז}$$

$$\cosh^2 t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh 2t$$

$$\sinh^2 t = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} = \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh 2t$$

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

$$\frac{d}{dt} \cosh t = \frac{d}{dt} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh t$$

$$\frac{d}{dt} \sinh t = \frac{d}{dt} \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t$$

$$\int t \sqrt{1+f'(t)^2} dt = \int t \cosh t dt = t \sinh t - \int \sinh t dt = t \sinh t - \cosh t$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} t \sqrt{1+f'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} t \cosh t dt = \beta \sinh \beta - \cosh \beta - \alpha \sinh \alpha + \cosh \alpha$$

$$\int f(t) \sqrt{1+f'(t)^2} dt = \int \cosh^2 t dt = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh 2t \right) dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sinh 2t$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \sqrt{1+f'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \cosh^2 t dt = \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{4} \sinh 2\beta - \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{4} \sinh 2\alpha$$

והמרכז הגיאומטרי המבוקש הוא :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\beta \sinh \beta - \cosh \beta - \alpha \sinh \alpha + \cosh \alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha}, \frac{\frac{1}{2} \beta + \frac{1}{4} \sinh 2\beta - \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{4} \sinh 2\alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha} \right) \\ &= \left(\frac{\beta \sinh \beta - \alpha \sinh \alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha} - \frac{\cosh \beta - \cosh \alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha}, \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta - \alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sinh 2\beta - \sinh 2\alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha} \right) \end{aligned}$$

ואולי אפשר עוד לפשט אבל לא ניסיתי.

לשאלה 4: מנוסחת אוילר $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x, y) \cdot \nabla f(x, y) = -2f(x, y)$ ולכן :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}[F]_2(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}[F]_1(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(xf(x, y)) + \frac{\partial}{\partial y}(yf(x, y)) = \\ &= f(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + f(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ &= 2f(x, y) + (x, y) \cdot \nabla f(x, y) = 0 \end{aligned}$$

אז $JF_{(x,y)}$ סימטרית לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

כמוכן F גזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (מחשבים ורואים).

משאלה 8. ח.10 נובע שיש מספר ממשי γ_F כך ש- $\oint_{\varphi_n} F(x, y) \cdot d(x, y) = n\gamma_F$.

ובפרט למסילה $\varphi: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ מוגדרת על ידי $\theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$ מספר ליפוף 1 ולכן :

$$\begin{aligned} \gamma_F &= \oint_{\varphi} F(x, y) \cdot d(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} F(\varphi(\theta)) \cdot \dot{\varphi}(\theta) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) (-\sin \theta, \cos \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \end{aligned}$$

לשאלה 5: 4\70\2021. וריאציה על שאלה 4 מממ"ן 13 מ'2020).

לא קשה לבדוק שמטריצת היעקוביאן סימטרית ומכאן ההמלצה בשאלה.
לא קשה לבדוק בעזרת משפט 24.1.8 שעל מעגל היחידה האינטגרל חיובי.
מכאן אפשר לקבל במגוון דרכים, כגון בעזרת חיתוכים ושרשרים של מסילות (או משפט גרין למי שכבר סיים גם את פרק 9) שכך גם על למשל מסילה שמקיפה את הראשית ונמצאת בקבוצה הנתונה האינטגרל הוא אותו מספר חיובי. לחילופין אפשר לנסות להצביע על הומוטופיה מבין מעגל היחידה ולולאה ריבועית שמוכלת בתחום הנתון.