

# מתווה לפתרון ממ"ן 13

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3  
סמסטר: 2022  
חומר הלימוד למטלה: פרק 8  
משקל המטלה: 5 נקודות

## שאלה 1 (20 נקודות)

תהיינה  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^k$  ו-  $\mu: [\alpha, \beta] \rightarrow M_{k \times l}(\mathbb{R})$  מסילות שאורכן סופי. תהי:  $\psi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^l$   
 $t \mapsto \varphi(t)\mu(t)$

- הוכיחו כי  $\psi$  היא מסילה שאורכה סופי. (מומלץ להיעזר במגוון משפטים).
- אם  $\varphi$  ו-  $\mu$  הן מסילות סדירות, האם גם  $\psi$  היא מסילה סדירה?  
מרחב המטריצות  $M_{k \times l}(\mathbb{R})$  מזוהה כרגיל עם המרחב האוקלידי  $\mathbb{R}^{kl}$ . ראו הערה 1.א.ג.

## פתרון סעיף א

לפי אבחנה 2.ג.8, כדי להוכיח שאורך מסילה סופי די להראות שהיא בעלת השתנות חסומה בקטע  $[\alpha, \beta]$ . נראה אם כן שהפונקציה  $\psi$  היא רציפה, ולכן היא מסילה, ושהיא בעלת השתנות חסומה בקטע  $[\alpha, \beta]$ , ולכן היא מסילה שאורכה סופי.

לפי חלק ב של דוגמה 6.י.1 (כאשר אנו מזוהים את  $M_{1 \times k}(\mathbb{R})$  עם  $\mathbb{R}^k$ , ראו הערה 1.א.1) הפונקציה  $\pi: (\nu, A) \mapsto \nu A$  שמוגדרת על ידי כפל מטריצות  $\pi: \mathbb{R}^k \times M_{k \times l}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^l$  היא פונקציה פולינומית, ולפיכך היא רציפה. האיסוף  $(\varphi, \mu)$  הוא פונקציה רציפה בקטע  $[\alpha, \beta]$  ולכן גם ההרכבה  $\psi = \pi \circ (\varphi, \mu)$  רציפה בקטע זה, כלומר  $\psi$  היא מסילה.

את העובדה ש-  $\psi$  בעלת השתנות חסומה אפשר להוכיח בדרך דומה לכל אחת משתי הדרכים בפתרון חלק ב של שאלה 11.ג.8, אבל אפשר גם לנצל את מה שהוכח בשאלה זאת. לפי טענה 6.ג.8 די להוכיח עבור  $1 \leq j \leq l$  שהרכיב  $[\psi]_j$  הוא פונקציה בעלת השתנות חסומה בקטע  $[\alpha, \beta]$ . לפי

$$[\psi]_j(t) = \sum_{i=1}^k [\varphi]_i(t) [\mu]_{ij}(t) \quad \text{הגדרת כפל מטריצות}$$

לכל  $t \in [\alpha, \beta]$ . לפי חלק ב של שאלה 12.ג.8 המכפלות  $t \mapsto [\varphi]_i(t) [\mu]_{ij}(t)$  הן פונקציות בעלות

$$t \mapsto \sum_{i=1}^k [\varphi]_i(t) [\mu]_{ij}(t) \quad \text{השתנות חסומה ב- } [\alpha, \beta], \text{ ולפי חלק ג של שאלה 5.ג.8 גם הפונקציה}$$

היא כזאת, כלומר  $\psi$  היא בעלת השתנות חסומה בקטע  $[\alpha, \beta]$ .

## פתרון סעיף ב

התשובה היא שלא בהכרח. דוגמה נגדית:  $k=l=1$ , ואז נוכל לזהות את  $M_{1 \times 1}(\mathbf{R})$  ואת  $\mathbf{R}^1$  עם  $\mathbf{R}$ , וניקח גם  $[\alpha, \beta] = [-1, 1]$ , וכן  $\varphi = \mu: t \mapsto t$  או  $\psi: t \mapsto t^2$ , ולכן  $\dot{\psi}(t) = \psi'(t) = 2t$  ובפרט  $\dot{\psi}(0) = 0$ , ולכן  $\psi$  אינה מסילה סדירה.

דוגמה נוספת: תהי  $A \in M_{k \times l}(\mathbf{R}) \setminus \{0\}$  ויהי  $v \in \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$  כך ש- $vA = 0$ . ניקח  $\varphi: t \mapsto tv$  ו- $\mu: t \mapsto tA$ . אז  $\dot{\varphi}(t) = v \neq 0$  וכן  $\dot{\mu}(t) = A \neq 0$  ולכן  $\varphi$  ו- $\mu$  מסילות סדירות, אבל  $\dot{\psi}(t) = 0$  לכל  $t \in [\alpha, \beta]$ , ובודאי  $\psi$  אינה מסילה סדירה.

## שאלה 2 (20 נקודות)

- תהי  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^k$  פונקציה בעלת התכונה: אם  $\alpha \leq x < y \leq \beta$  אז  $|\varphi(y) - \varphi(x)| < y - x$ .  
 א. הוכיחו ש- $\varphi$  היא מסילה ושאורכה סופי, ומתקיים  $L(\varphi) \leq \beta - \alpha$ .  
 ב. הוכיחו שאם  $L(\varphi) = \beta - \alpha$  ו- $[x, y] \subseteq [\alpha, \beta]$  אז  $L(\varphi|_{[x, y]}) = y - x$ .  
 ג. הסיקו שאם  $L(\varphi) = \beta - \alpha$  אז אין קטע  $[x, y] \subseteq [\alpha, \beta]$  עבורו  $\varphi|_{[x, y]}$  שקולה למסילה אפינית.  
 (מסילה אפינית: כזאת שהיא צמצום של פונקציה אפינית).  
 ד. הדגימו מסילה המקיימת את הנחות והשאלה ושעבורה  $L(\varphi) = \beta - \alpha$ .

### פתרון סעיף א

מחלק ב של מטענה 1.ה.2  $\varphi$  רציפה במידה שווה ולכן רציפה ב- $[\alpha, \beta]$  ולכן היא מסילה. לכל חלוקה  $T \in \Pi([\alpha, \beta])$  (בסימוני הספר) מתקיים

$$l(\varphi_T) = \sum_{i=1}^r |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| < \sum_{i=1}^r (t_i - t_{i-1}) = t_r - t_0 = \beta - \alpha$$

$$L(\varphi) = \sup_{T \in \Pi([\alpha, \beta])} l(\varphi_T) \leq \beta - \alpha \quad \text{ולכן}$$

ובפרט אורכה של  $\varphi$  סופי.

### פתרון סעיף ב

מאחר שהצמצום של  $\varphi$  לכל קטע סגור שמוכל ב- $[\alpha, \beta]$  מקיים את נתוני השאלה, לפי סעיף א והחישוב בפתרון סעיף א דלעיל נובע שצמצום כזה הוא מסילה שאורכה סופי, וכן<sup>1</sup>  

$$L(\varphi|_{[\alpha, x]}) \leq x - \alpha \quad L(\varphi|_{[x, y]}) \leq y - x \quad L(\varphi|_{[y, \beta]}) \leq y - \beta$$
 אם נניח בשלילה ש- $L(\varphi|_{[x, y]}) < y - x$  אז  $L(\varphi|_{[x, y]}) < y - x$  ולכן  

$$\beta - \alpha = L(\varphi) = L(\varphi|_{[\alpha, x]}) + L(\varphi|_{[x, y]}) + L(\varphi|_{[y, \beta]}) < (x - \alpha) + (y - x) + (y - \beta) = \beta - \alpha$$
 וזאת סתירה.

### פתרון סעיף ג

נניח בשלילה ש- $\varphi|_{[x, y]}$  שקולה למסילה אפינית  $\psi$ . לפי שאלה 13.ב.8 תמונת  $\psi$  היא הקטע שקצותיו  $\varphi(x)$  ו- $\varphi(y)$  ומתקיים  

$$L(\psi) = |\varphi(y) - \varphi(x)|$$
 ולפי טענה 17.ב.8 (שמסילות שקולות הן בעלות אותו אורך):  

$$L(\varphi|_{[x, y]}) = L(\psi) = |\varphi(y) - \varphi(x)|$$

<sup>1</sup> אם  $x = \alpha$  אין מובן לאגף שמאל של האי-שוויון השמאלי, ויש להבינו בתור  $0 \leq 0$ , ובדומה אם  $y = \beta$  אין מובן לאגף שמאל של האי-שוויון הימני, ויש להבינו בתור  $0 \leq 0$ ; לחילופין אפשר להבין במקרים אלה את הסימון  $[\alpha, x]$  או  $[y, \beta]$  כ"קטע מנוון" ואת הסימון  $\varphi|_{[\alpha, x]}$  או  $\varphi|_{[y, \beta]}$  כ"מסילה מנוונת" שאורכה 0, בניגוד למקובל בספר.

אבל לפי סעיף ב אם  $L(\varphi) = \beta - \alpha$  ויחד עם הנתון בשאלה  $L(\varphi|_{[x,y]}) = y - x > |\varphi(y) - \varphi(x)|$  וקיבלנו סתירה.

### פתרון סעיף ד

לפי סעיף ג במסילה המבוקשת לא יכול להיות שום "קטע ישר". לפי סעיף ב נדרש שהמסילה המבוקשת "ממפה" כל קטע למסילה שאורכה כאורך הקטע. דוגמה מתאימה היא המסילה הסטנדרטית שתמונתה מעגל היחידה, כלומר  $\beta = 2\pi$ ,  $\alpha = 0$  ו-  
 $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$   
 $t \mapsto (\cos t, \sin t)$

שמתאימה לאורך קשת של  $t$  רדיאנים את קצה קשת המעגל שאורכה  $t$  וקצה השני הנקודה הקבועה  $(1, 0)$ . נבדוק שמתקיימים התנאים המבוקשים:

גיאומטרית, היקף המעגל הוא  $2\pi = \beta - \alpha$  והנקודות  $\varphi(x)$  ו- $\varphi(y)$  הן קצות קשת של המעגל באורך  $y - x$ , והמיתר של המעגל שנשען על נקודות אלה קצר יותר ואורכו  $|\varphi(y) - \varphi(x)|$ .  
 נבדוק גם בחשבון ישיר:

$$\begin{aligned} |\varphi(y) - \varphi(x)|^2 &= |(\cos y - \cos x, \sin y - \sin x)|^2 = (\cos y - \cos x)^2 + (\sin y - \sin x)^2 \\ &= (\cos^2 y - 2\cos y \cos x + \cos^2 x) + (\sin^2 y - \sin y \sin x + \sin^2 x) \\ &= (\cos^2 y + \sin^2 y) - 2(\cos y \cos x + \sin y \sin x) + (\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= 1 - 2\cos(y - x) + 1 = 2(1 - \cos(y - x)) = 2 \cdot 2\sin^2 \frac{y-x}{2} < 2\left(\frac{y-x}{2}\right)^2 = (y-x)^2 \end{aligned}$$

ולכן  $|\varphi(y) - \varphi(x)| < y - x$  (בדרך ניצלנו נוסחאות טריגונומטריות וכן את העובדה המוכרת מאינפי 1 שאם  $t > 0$  אז  $\sin t < t$ ). כמוכן:

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} |\dot{\varphi}(t)| dt = \int_0^{2\pi} |(-\sin t, \cos t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi = \beta - \alpha$$

### שאלה 3 (20 נקודות)

הגרף של הפונקציה  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$  המוגדרת על ידי  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  הוא תמונת מסילה

פשוטה וסדירה במישור. מצאו את המרכז הגיאומטרי של מסילה זאת.

הערה: הפונקציה הזאת נקראת קוסינוס ההיפרבולי, ונהוג לסמן  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

נגזרתה נקראת פונקציית הסינוס ההיפרבולי ומסומנת  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

כל אחת משתי הפונקציות האלה היא הנגזרת של האחרת, ויש ביניהן קשרים רבים, כגון  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ .

#### פתרון

$$\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^2$$

המסילה היא

$$t \mapsto (t, f(t))$$

ונגזרתה  $\dot{\varphi}(t) = (1, f'(t))$  רציפה ואינה אפס, ולכן המסילה סדירה.

אורך המסילה הוא  $L(\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\varphi}(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$  ויש לחשבו. המרכז הגיאומטרי הוא:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(\varphi)} \left( \int_{\varphi} x |d(x, y)|, \int_{\varphi} y |d(x, y)| \right) &= \frac{1}{L(\varphi)} \left( \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi]_1(t) |\dot{\varphi}(t)| dt, \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi]_2(t) |\dot{\varphi}(t)| dt \right) \\ &= \frac{1}{L(\varphi)} \left( \int_{\alpha}^{\beta} t \sqrt{1 + f'(t)^2} dt, \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2} dt \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \cosh t = \frac{d}{dt} \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh t$$

ניגש לחישוב:

$$\frac{d}{dt} \sinh t = \frac{d}{dt} \left( \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + f'(t)^2} &= \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \sqrt{1 + \frac{(e^t - e^{-t})^2}{4}} = \sqrt{\frac{4 + e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4}} = \sqrt{\frac{(e^t + e^{-t})^2}{4}} = \sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t \end{aligned}$$

ולכן:

$$L(\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \cosh t dt = \sinh \beta - \sinh \alpha = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta} - e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

אז

$$\int_{\alpha}^{\beta} t \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} t \cosh t dt = t \sinh t - \int \sinh t dt = t \sinh t - \cosh t$$

וכן

$$\int_{\alpha}^{\beta} t \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} t \cosh t dt = \beta \sinh \beta - \cosh \beta - \alpha \sinh \alpha + \cosh \alpha$$

ולכן:

$$\cosh^2 t = \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh 2t$$

כמוכן:

$$\int f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int \cosh^2 t dt = \int \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh 2t \right) dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sinh 2t$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \cosh^2 t dt = \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{4} \sinh 2\beta - \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{4} \sinh 2\alpha$$

והמרכז הגיאומטרי המבוקש הוא :

$$\left( \frac{\beta \sinh \beta - \cosh \beta - \alpha \sinh \alpha + \cosh \alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha}, \frac{\frac{1}{2} \beta + \frac{1}{4} \sinh 2\beta - \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{4} \sinh 2\alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha} \right)$$

$$= \left( \frac{\beta \sinh \beta - \alpha \sinh \alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha} - \frac{\cosh \beta - \cosh \alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha}, \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta - \alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sinh 2\beta - \sinh 2\alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha} \right)$$

ואולי אפשר עוד לפשט אבל לא ניסיתי.

#### שאלה 4 (20 נקודות)

תהי  $f: \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbf{R}$  פונקציה הומוגנית חיובית ממעלה -2 ותהי  $F: \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbf{R}^2$  המוגדרת על ידי:

לכל מספר שלם  $n$  תהי  $\varphi_n$  לולאה בעלת מספר ליפוף  $n$  סביב הראשית. הוכיחו:

$$\oint_{\varphi_n} F(x, y) \cdot d(x, y) = n \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

**תיקון לשאלה שפורסם באתר הקורס:** נתון נוסף:  $f$  גזירה ברציפות ב-  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .

#### פתרון

כמובן  $F$  גזירה ברציפות ב-  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , כי לפי חלק ב של שאלה 15.ז.3 עם הפונקציה

$$g: (x, y) \mapsto (-y, x)$$

$$JF_{(x,y)} = g(x, y)^T \nabla f(x, y) + f(x, y) Jg_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \nabla f(x, y) + f(x, y) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{מתקיים:}$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x, y) \cdot \nabla f(x, y) = -2f(x, y) \quad \text{לפי זהות אוילר (דוגמה 11.ב.3) מתקיים}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [F]_2(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} [F]_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (xf(x, y)) + \frac{\partial}{\partial y} (yf(x, y)) =$$

$$= f(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + f(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

$$= 2f(x, y) + (x, y) \cdot \nabla f(x, y) = 0$$

כלומר  $\frac{\partial}{\partial x} [F]_2(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} [F]_1(x, y)$  ולכן  $JF_{(x,y)}$  סימטרית לכל  $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .

$$\oint_{\varphi_n} F(x, y) \cdot d(x, y) = n \gamma_F \quad \text{כך ש-} \gamma_F \text{ ממש } \gamma_F \text{ משאלה 10.ח.8 נובע שיש מספר ממשי}$$

בפרט מספר הליפוף של מסילה  $\varphi: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$  המוגדרת על ידי  $\theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$  סביב הראשית הוא 1 ולכן:

$$\begin{aligned} \gamma_F &= \oint_{\varphi} F(x, y) \cdot d(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} F(\varphi(\theta)) \cdot \dot{\varphi}(\theta) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) (-\sin \theta, \cos \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \end{aligned}$$

## שאלה 5 (20 נקודות)

$$F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

הראו כי הפונקציה

$$(x, y) \mapsto \frac{e^x}{x^2 + y^2} (x \sin y - y \cos y, y \sin y + x \cos y)$$

אינה שדה משמר בקבוצה:  $((-2021, 2021) \times (-2021, 2021)) \setminus ([-2020, 2020] \times [-2020, 2020])$

המלצה: ראשית כדאי להראות שהפונקציה היא שדה משמר בכל קבוצה פתוחה ופשוטת-קשר בה היא מוגדרת.

### פתרון

לפי שאלה 3.8.3, כדי להראות ש- $F$  אינה שדה משמר בקבוצה

$$U = ((-2021, 2021) \times (-2021, 2021)) \setminus ([-2020, 2020] \times [-2020, 2020])$$

די להראות ש- $\oint_{\gamma} F \cdot d(x, y) \neq 0$  על איזושהי לולאה  $\gamma$  שתמונתה ב- $U$ . אבל לא נראה פשוט

למצוא לולאה נוחה ב- $U$ . במקום זאת נפעל בדרך אחרת: ראשית ניקח לולאה שנוח לנסות לחשב

עליה את האינטגרל שלנו: למשל  $\gamma: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  המוגדרת על ידי  $\theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$  (כי

המכנה שמופיע בפונקציה שלנו קבוע עליה). ננסה לחשב:

$$\oint_{\gamma} F \cdot d(x, y) = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt$$

כדי לקצר בחישוב נחשב בנפרד:

$$\begin{aligned} F(x, y) \cdot (-y, x) &= \frac{e^x}{x^2 + y^2} (x \sin y - y \cos y, y \sin y + x \cos y) \cdot (-y, x) \\ &= \frac{e^x}{x^2 + y^2} (-xy \sin y + y^2 \cos y + xy \sin y + x^2 \cos y) \\ &= \frac{e^x}{x^2 + y^2} (x^2 + y^2) \cos y = e^x \cos y \end{aligned}$$

$$\oint_{\gamma} F \cdot d(x, y) = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) dt \quad \text{לכן:}$$

זה לא נראה נחמד לחשב את זה, אבל אין צורך: מתקיים  $-1 \leq \sin t \leq 1$ , והפונקציה  $\cos$  יורדת

בקטע  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , ולכן לכל  $t$  ממשי מתקיים  $\cos(\sin t) = \cos(|\sin t|) \geq \cos 1 > \cos \frac{\pi}{2} = 0$ .

אז הפונקציה  $e^{\cos t} \cos(\sin t)$  היא פונקציה רציפה וחיובית ולכן האינטגרל שלה בקטע  $[0, 2\pi]$

$$\oint_{\gamma} F \cdot d(x, y) = \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) dt > 0 \quad \text{חיובי, כלומר:}$$

מצאנו אם כן לולאה שהאינטגרל של התבנית שלנו עליה אינו 0.

כעת נמצא לולאה אחרת  $\gamma$  שתמונתה ב- $U$  כך ש- $\oint_{\gamma} F \cdot d(x, y) = \oint_{\gamma} F \cdot d(x, y) > 0$  וזה יראה ש-

$F$  אינו שדה משמר ב- $U$ .

אפשרות אחת: לפי טענה 13.ח.8, אם יש הומוטופיה של לולאות בין שתי לולאות ב-  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  אז ערך האינטגרל  $\oint F \cdot d(x,y)$  שווה על שתי הלולאות. זאת בתנאי נבדוק ש-  $F$  גזירה ברציפות ב-  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  ומטריצת היעקוביאן שלה סימטרית בכל נקודה בתחום זה. נבדוק שזה כך:

$$f: (x,y) \mapsto \frac{e^x}{x^2 + y^2} \quad \text{נסמן}$$

$$g: (x,y) \mapsto (x \sin y - y \cos y, y \sin y + x \cos y) \quad \text{ר}$$

$$\nabla f(x,y) = \left( \frac{(x^2 + y^2)e^x - 2xe^x}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2ye^x}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{e^x}{(x^2 + y^2)^2} (x^2 + y^2 - 2x, -2y) \quad \text{אז}$$

$$Jg_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \sin y & x \cos y + y \sin y - \cos y \\ \cos y & \sin y + y \cos y - x \sin y \end{pmatrix} \quad \text{וכן:}$$

מאחר ש-  $F = fg$ , לפי חלק ב של שאלה 15.ז.3 מתקיים:

$$\begin{aligned} JF_{(x,y)} &= g(x,y)^T \nabla f(x,y) + f(x,y) Jg_{(x,y)} \\ &= \frac{e^x}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} x \sin y - y \cos y \\ y \sin y + x \cos y \end{pmatrix} (x^2 + y^2 - 2x, -2y) \\ &\quad + \frac{e^x}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} \sin y & x \cos y + y \sin y - \cos y \\ \cos y & \sin y + y \cos y - x \sin y \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^x}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} (x \sin y - y \cos y)(x^2 + y^2 - 2x) & (x \sin y - y \cos y)(-2y) \\ (y \sin y + x \cos y)(x^2 + y^2 - 2x) & (y \sin y + x \cos y)(-2y) \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{e^x}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} (x^2 + y^2) \sin y & (x^2 + y^2)(x \cos y + y \sin y - \cos y) \\ (x^2 + y^2) \cos y & (x^2 + y^2)(\sin y + y \cos y - x \sin y) \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^x \sin y}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} x^3 + xy^2 - x^2 + y^2 & x^2 y + y^3 - 2xy \\ x^2 y + y^3 - 2xy & x^2 - y^2 - x^3 - xy^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{e^x \cos y}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} 2xy - x^2 y - y^3 & x^3 + xy^2 - x^2 + y^2 \\ x^3 + xy^2 - x^2 + y^2 & x^2 y + y^3 - 2xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

רואים ש-  $F$  גזירה ברציפות ב-  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  ומטריצת היעקוביאן שלה סימטרית בכל נקודה.<sup>2</sup>

כעת דרושה לנו הומוטופיה של לולאות  $H: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  כך שאחת מבין  $H_0$  ו-

$H_1$  היא  $\gamma$  שלנו, והאחרת היא לולאה שתמונתה ב-  $U$ .

<sup>2</sup> ולפי משפט 11.ח.8 הפונקציה  $F$  היא שדה משמר בכל קבוצה פתוחה ופשוטתקשר שאינה מכילה את  $(0,0)$ .

ראשית נמצא דרך נוחה יותר לקבוע מתי נקודה  $(x, y)$  נמצאת ב- $U$ . לשם כך נבין מתי

$$(x, y) \in (-M, M)^2 \text{ זה שקול לכך ש- } |y| < M \text{ וגם } \max\{|x|, |y|\} < M \text{ כלומר } \max\{|x|, |y|\} < M.$$

$$\text{באופן דומה אפשר לראות ש- } (x, y) \in [-m, m]^2 \text{ אם ורק אם } \max\{|x|, |y|\} \leq m.$$

$$\text{לפי הנתון } U = (-M, M)^2 \setminus [-m, m]^2 \text{ עבור } m = 2020 \text{ ו- } M = 2021.$$

$$\text{אז } (x, y) \in U \text{ אם ורק אם } (x, y) \in (-M, M)^2 \text{ ו- } (x, y) \notin [-m, m]^2, \text{ כלומר אם ורק אם מתקיים:}$$

$$m < \max\{|x|, |y|\} < M$$

בעזרת שאלה 1.1.20 נוכל לראות שהפונקציה  $\mu: (x, y) \mapsto \max\{|x|, |y|\}$  היא פונקציה יסודית,

$$U = \{(x, y) \mid m < \mu(x, y) < M\} \text{ ולכן היא רציפה ב- } \mathbf{R}^2, \text{ וכאמור:}$$

$$\text{אנו זקוקים אם כן ללולאה } \varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2 \text{ כך ש- } m < \mu(\varphi(t)) < M \text{ לכל } t \in [0, 2\pi].$$

$$\text{נבחר איזהו } b \text{ כך ש- } m < b < M, \text{ למשל } b = 2020.5. \text{ נגדיר } \varphi(t) = \frac{b}{\mu(\gamma(t))} \gamma(t).$$

$$\text{כזכור הגדרנו קודם } \gamma(t) = (\cos t, \sin t). \text{ אז:}$$

$$\begin{aligned} \mu(\varphi(t)) &= \mu\left(\frac{b}{\mu(\gamma(t))} \gamma(t)\right) = \mu\left(\frac{b}{\mu(\gamma(t))} (\cos t, \sin t)\right) = \max\left\{\left|\frac{b}{\mu(\gamma(t))} \cos t\right|, \left|\frac{b}{\mu(\gamma(t))} \sin t\right|\right\} \\ &= \frac{b}{\mu(\gamma(t))} \max\{|\cos t|, |\sin t|\} = \frac{b}{\mu(\gamma(t))} \cdot \mu(\gamma(t)) = b \end{aligned}$$

לכן תמונת  $\varphi$  אכן מוכלת ב- $U$ . נגדיר כעת הומוטופיה של לולאות בינה לבין הלולאה  $\gamma$ :

$$H(t, \lambda) = \lambda \varphi(t) + (1 - \lambda) \gamma(t)$$

$$\text{אז בבירור לכל } t \in [0, 2\pi] \text{ מתקיים } H(t, 0) = \gamma(t) \text{ ו- } H(t, 1) = \varphi(t) \text{ כלומר } H_0 = \gamma \text{ ו- } H_1 = \varphi.$$

זאת פונקציה רציפה וכן לכל  $\lambda \in [0, 1]$  מתקיים

$$H_\lambda(0) = H(0, \lambda) = \lambda \gamma(0) + (1 - \lambda) \varphi(0) = \lambda \gamma(2\pi) + (1 - \lambda) \varphi(2\pi) = H(2\pi, \lambda) = H_\lambda(2\pi)$$

כלומר כל  $H_\lambda$  היא לולאה, ולכן זאת הומוטופיה של לולאות מ- $\gamma$  ל- $\varphi$ . נראה ש- $(0, 0)$  אינה

בתמונת  $H$ , ואז היא הומוטופיה של לולאות מ- $\gamma$  ל- $\varphi$  ב- $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  וכיוון ש- $JF_{(x, y)}$  רציפה

$$\text{וסימטרית לכל } (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \text{ לפי טענה 8.13 נ.ח.} \oint_\varphi F \cdot d(x, y) = \oint_\gamma F \cdot d(x, y) > 0 \text{ ולכן}$$

$$F \text{ אינו שדה משמר ב- } U. \text{ ובכן אם נניח בשלילה ש- } H(t, \lambda) = (0, 0) \text{ אז:}$$

$$\begin{aligned} (0, 0) &= H(t, \lambda) = \lambda \varphi(t) + (1 - \lambda) \gamma(t) = \lambda \frac{b}{\mu(\gamma(t))} \gamma(t) + (1 - \lambda) \gamma(t) = \left(\lambda \frac{b}{\mu(\gamma(t))} + 1 - \lambda\right) \gamma(t) \\ \Rightarrow \lambda \frac{b}{\mu(\gamma(t))} + 1 - \lambda &= 0 \Rightarrow \lambda b + (1 - \lambda) \mu(\gamma(t)) = 0 \end{aligned}$$

$$\mu(\gamma(t)) = \max\{|\cos t|, |\sin t|\} > 0 \text{ אבל}$$

$$\text{כלומר } b \text{ ו- } \mu(\gamma(t)) \text{ שניהם בקבוצה הקמורה } (0, \infty) \text{ ולכן גם } \lambda b + (1 - \lambda) \mu(\gamma(t)) = 0 \text{ נמצא}$$

בה, וזאת סתירה.

אתאר בקצרה עוד דרך לסיים את ההוכחה, ללא שימוש בהומוטופיה. מומלץ לקחת כלי כתיבה ולצייר את המסילות המוזכרות כאן.

מספר הליפוף של הלולאה  $\gamma$  סביב הראשית בהכרח אינו 0, לפי חלק א של שאלה 10.נ.8.

לכן לפי אותה שאלה האינטגרל  $\oint_{\varphi} F \cdot d(x, y)$  אינו 0 לכל לולאה  $\varphi$  שמספר הליפוף שלה אינו.

נבחר איזהו מספר  $2020 < b < 2021$  (למשל  $b = 2020.5$ ). לפי הערה 9.נ.8 מספר הליפוף של

הלולאה  $\delta: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  שמוגדרת על ידי  $t \mapsto (b\sqrt{2} \cos t, b\sqrt{2} \sin t)$  הוא 1. לכן

כאמור  $\oint_{\delta} F \cdot d(x, y) \neq 0$ . כעת נמצא לולאה אחרת  $\varphi$  שתמונתה מוכלת ב- $U$  ומתקיים

$$\oint_{\varphi} F \cdot d(x, y) = \oint_{\delta} F \cdot d(x, y)$$

נגדיר ארבע מסילות  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4: [-b, b] \rightarrow U$  על ידי:

$$\varphi_1: t \mapsto (b, t)$$

$$\varphi_2: t \mapsto (-t, b)$$

$$\varphi_3: t \mapsto (-b, -t)$$

$$\varphi_4: t \mapsto (t, -b)$$

בבירור תמונותיהן ב- $U$ . נקודת היעד של  $\varphi_i$  היא נקודת המוצא של  $\varphi_{i+1}$  עבור  $i = 1, 2, 3$ . זה לא

אומר שהמסילות האלה ניתנות לשרשור (הקטעים בהן הן מוגדרות אינם מתאימים) אבל יש

מסילות  $\varphi'_i$  ששקולות בהתאמה ל- $\varphi_i$  כך שקיימת המסילה  $\varphi = \varphi'_1 * \varphi'_2 * \varphi'_3 * \varphi'_4$ . נקודת המוצא

שלה היא נקודת המוצא של  $\varphi_1$  ונקודת היעד שלה היא נקודת היעד של  $\varphi_4$ , ששווה לנקודת

המוצא של  $\varphi_1$ , ולכן  $\varphi$  היא לולאה שתמונתה ב- $U$ . כמוכן בבירור אורכה סופי כי היא שרשור של

מסילות ששקולות למסילות סדירות, שכל אחת מהן אורכה סופי (למעשה די ברור ש- $\varphi$  היא

לולאה פשוטה שתמונתה הריבוע שקודקודיו  $(\pm b, \pm b)$ , ולכן אורכה הוא היקף הריבוע הזה,

כלומר 8b). כעת נותר להראות שמתקיים  $\oint_{\varphi} F \cdot d(x, y) = \oint_{\delta} F \cdot d(x, y)$ . לשם כך נציג גם את  $\delta$

כשרשור של מסילות. לשם כך נגדיר  $\delta_j: [(j-1)\frac{\pi}{4}, j\frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  עבור  $j = 1, 2, \dots, 8$  על

ידי  $\delta_j(t) = \delta(t)$ . בבירור  $\delta = \delta_1 * \delta_2 * \delta_3 * \delta_4 * \delta_5 * \delta_6 * \delta_7 * \delta_8$  (עכשיו ממש כדאי לקחת כלי

כתיבה ולצייר את המסילות). נשים לב לדברים הבאים:

המסילה  $\varphi_2$  חלופית למסילה  $\delta_2 * \delta_3$  ותמונות שתיהן בחצי המישור העליון שהוא קבוצה קמורה

$$\int_{\varphi_2} F \cdot d(x, y) = \int_{\delta_2 * \delta_3} F \cdot d(x, y) \quad \text{ולכן:}$$

המסילה  $\varphi_3$  חלופית למסילה  $\delta_4 * \delta_5$  ותמונות שתיהן בחצי המישור השמאלי שהוא קבוצה

$$\int_{\varphi_3} F \cdot d(x, y) = \int_{\delta_4 * \delta_5} F \cdot d(x, y) \quad \text{ולכן:}$$

המסילה  $\varphi_4$  חלופית למסילה  $\delta_6 * \delta_7$  ותמונות שתיהן בחצי המישור התחתון שהוא קבוצה

$$\int_{\varphi_4} F \cdot d(x, y) = \int_{\delta_6 * \delta_7} F \cdot d(x, y) \quad \text{ולכן:}$$

המסילות  $\delta_8$  ו-  $\delta_1$  אינן ניתנות לשרשור, בגללן תחומיהן  $\left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$  ו-  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  שאינם מתאימים,

אבל יש מסילה  $\delta'_8$  ששקולה למסילה  $\delta_8$  כך שמוגדר השרשור  $\delta'_8 * \delta_1$ , והוא מסילה חלופית

למסילה  $\varphi_1$ , ותמונות שתי המסילות החלופיות בחצי המישור השמאלי שהוא קבוצה קמורה ו-  $F$

שדה משמר בה, ולכן:

$$\int_{\varphi_1} F \cdot d(x, y) = \int_{\delta'_8 * \delta_1} F \cdot d(x, y) = \int_{\delta'_8} F \cdot d(x, y) + \int_{\delta_1} F \cdot d(x, y) = \int_{\delta_8} F \cdot d(x, y) + \int_{\delta_1} F \cdot d(x, y)$$

עכשיו נוכל לסכם:

$$\begin{aligned} \oint_{\varphi} F \cdot d(x, y) &= \oint_{\varphi'_1 * \varphi'_2 * \varphi'_3 * \varphi'_4} F \cdot d(x, y) \\ &= \int_{\varphi'_1} F \cdot d(x, y) + \int_{\varphi'_2} F \cdot d(x, y) + \int_{\varphi'_3} F \cdot d(x, y) + \int_{\varphi'_4} F \cdot d(x, y) \\ &= \int_{\varphi_1} F \cdot d(x, y) + \int_{\varphi_2} F \cdot d(x, y) + \int_{\varphi_3} F \cdot d(x, y) + \int_{\varphi_4} F \cdot d(x, y) \\ &= \int_{\delta_8} F \cdot d(x, y) + \int_{\delta_1} F \cdot d(x, y) + \int_{\delta_2 * \delta_3} F \cdot d(x, y) + \int_{\delta_4 * \delta_5} F \cdot d(x, y) + \int_{\delta_6 * \delta_7} F \cdot d(x, y) \\ &= \oint_{\delta_1 * \delta_2 * \delta_3 * \delta_4 * \delta_5 * \delta_6 * \delta_7 * \delta_8} F \cdot d(x, y) = \oint_{\delta} F \cdot d(x, y) \end{aligned}$$

דרך נוספת תתאפשר בסוף פרק 9: הקבוצה  $K = [-b, b]^2 \setminus B^2((0, 0); 1)$  יחד עם המסילות  $\varphi_1, \varphi_2$

,  $\varphi_3, \varphi_4$  ו-  $\bar{\gamma}$  מקיימות את הנחות משפט גרין (מינוח 9.ט.14). בעזרת משפט גרין (9.ט.17) אפשר

$$\oint_{\varphi_1} F \cdot d(x, y) + \oint_{\varphi_2} F \cdot d(x, y) + \oint_{\varphi_3} F \cdot d(x, y) + \oint_{\varphi_4} F \cdot d(x, y) = \oint_{\gamma} F \cdot d(x, y):$$
 להסיק את המסקנה: