

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 חומר הלימוד למטלה: פרקים 4–7
 מספר השאלות: 6
 סמסטר: 2022
 משקל המטלה: 5 נקודות
 מועד אחרון להגשה: 20.4.2022

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (15 נקודות)

תהי $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי:

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} x(y-1) & x \leq y \\ (x-1)y & x > y \end{cases}$$

תהי $v: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ונגדיר פונקציה $u: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי:

$$t \mapsto \int_0^1 g(x, t) v(x) dx$$

הוכיחו ש- u גזירה פעמיים בקטע $(0,1)$ ומתקיים $u''(t) = v(t)$ לכל $t \in (0,1)$.

שאלה 2 (15 נקודות)

בשאלה זאת נשתמש בעובדה אחת שמוכחת בקורס אלגברה לינארית 2: מטריצה ממשית סימטרית היא לכסינה, ובעובדה נוספת מהקורס אלגברה לינארית 1: למטריצות דומות אותה עקבה. הראו שמעובדות אלה נובע שאם A היא מטריצה סימטרית חיובית ו- $\text{tr } A = 0$ אז $A = 0$. נעבור לעיקר השאלה:

תהי U קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^k$. פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $\mathbb{R}$ נקראת פונקציה הרמונית בקבוצה

הפתוחה U אם היא גזירה פעמיים ברציפות ב- U ומתקיים $\sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = 0$ לכל $a \in U$.

הוכיחו שאם f פונקציה הרמונית ב- U ובנוסף לכל $a \in U$ מתקיים $\nabla f(a) \neq 0$ או $Hf_a \neq 0$ אז

$f(A)$ היא קבוצה פתוחה.

הערה: אפשר להוכיח שאם f הרמונית ואינה קבועה אז $f(U)$ פתוחה, גם ללא ההנחות הנוספות שהנחנו כאן, באמצעים שנלמדים בקורס משוואות דיפרנציאליות חלקיות, או באמצעים שנלמדים בקורס פונקציות מרוכבות.

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי $k \geq 3$, ונסמן $x = (x_1, \dots, x_k)$.

קבעו עבור אילו זוגות של אינדקסים i ו- j המשוואה $|x| - \cos(x_j) = 0$ מגדירה באופן סתום

את x_i כפונקציה של שאר רכיבי x בסביבה של הנקודה $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$.

נמקו היטב מדוע עבור זוגות אלה המשוואה מגדירה פונקציה, ומדוע בכל שאר המקרים היא אינה מגדירה פונקציה.

שאלה 4 (15 נקודות)

תהיינה S_1 ו- S_2 יריעות חלקות ב- $\mathbb{R}^k$. תהי $a \in S_1 \cap S_2$.

הוכיחו שאם $T_a(S_1) \cap T_a(S_2) = \{0\}$ אז יש סביבה U של a כך ש- $U \cap S_1 \cap S_2 = \{a\}$.

הפריכו את הטענה ההפוכה בעזרת דוגמה נגדית.

שאלה 5 (15 נקודות)

למטריצה A מסדר $(k-1) \times k$ נסמן ב- A_i את המטריצה מסדר $(k-1) \times (k-1)$ שמתקבלת

ממחיקת העמודה ה- i של המטריצה A . נסמן: $\xi(A) = (\det A_1, -\det A_2, \dots, (-1)^{k-1} \det A_k)$

תהי U קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^k$. תהי $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ שגזירה ב- U ותהי $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$ שגזירה

ברציפות ב- U . הוכיחו שאם a היא נקודת קיצון של f בקבוצה $\{x \in U \mid \varphi(x) = 0^{[k-1]}\}$ אז

הוקטור $\nabla f(a)$ ניצב לוקטור $\xi(J\varphi_a)$. (היזכרו בנוסחת הפיתוח של דטרמיננטה).

שאלה 6 (20 נקודות)

תהי $f: (0, \infty)^3 \rightarrow \mathbb{R}$ שמוגדרת על ידי: $(x, y, z) \mapsto \frac{1}{x^2 y^3 z^5}$

הראו שיש ל- f ערך מזערי בקבוצה $D = \{(x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x \geq y, x^4 + y^4 + z^4 \leq 1\}$

ומצאו אותו.

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: על פי 15\2016\3. מחלקים את האינטגרל לקטעים $[0, t]$ ו- $[t, 1]$ וגוזרים את כל אחד מהמחזורים בעזרת נוסחת לייבניץ. גזירה שניה לפי המשפט היסודי של החדו"א.

לשאלה 2: הרחבה פראית של 3\52\2021 שהיתה על פי שאלה ממטלת אופל 02 באתר, שמשלבת שאלה ממקור אחר שלא רשום לי מאיפה הגיעה אלי.

ראשית המטריצה הממשית הסימטרית A דומה למטריצה אלכסונית, שסכום איברי האלכסון שלה הוא $\text{tr } A = 0$. אם $A \neq 0$ אז כך גם המטריצה האלכסונית, וכדי שהעקבה תהיה 0 הכרחי שאחד הערכים העצמיים שלילי. ואם u וקטור עצמי מתאים לערך עצמי $\lambda < 0$ אז $\lambda u^T u = \lambda |u|^2 < 0$ ולכן המטריצה A אינה חיובית. לכן אם A סימטרית וחיובית ו- $\text{tr } A = 0$ אז $A = 0$. בדומה אם A סימטרית ושלילית ו- $\text{tr } A = 0$ אז $-A$ סימטרית וחיובית עם עקבה אפס ולכן $A = 0$. נעבור לעיקר: די להראות שלכל $a \in U$ יש סביבה של $f(a)$ שמוכלת ב- $f(U)$. אם $\nabla f(a) \neq 0$ אז לפי משפט 10.ב.6 אינה נקודת קיצון. אחרת $Hf_a \neq 0$. בנוסף

$$Hf_a \text{ מטריצה ממשית סימטרית לפי טענה 8.ב.5. כמוכן } \text{tr } Hf_a = \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = 0$$

הרמונית בסביבת a . לכן כפי שראינו Hf_a מטריצה שאינה חיובית ואינה שלילית, ולפי מסקנה 3.ד.6 אין a אינה נקודת קיצון מקומית. לכן אין ל- f נקודות קיצון מקומיות ב- U . תהי $a \in U$ ונבחר B סביבה כדורית פתוחה של a . לפי אבחנה 3.ב.6 אין לפונקציה נקודות קיצון ב- B , ולכן לקבוצה $f(B)$ אין מינימום ואין מקסימום. הקבוצה B קשורה מסילתית ולכן לפי טענה 2.ט.2 $f(B)$ קשורה מסילתית. לפי טענה 10.ט.2 $f(B)$ קמורה. לבסוף, הערה 15.ג.1 מפרטת את כל הקבוצות הקמורות ב- $\mathbf{R}$, ומתוכן כל אלה שאין להן מינימום ואין להם מקסימום הן קבוצות פתוחות. לכן $f(B)$ היא סביבה של $f(a)$ שמוכלת ב- $f(U)$.

לשאלה 3: 3\92\2021.

זה קורה בדיוק כאשר $i = 1$ ו- $j \neq 1$. במקרה זה כמובן מתקיימים תנאי משפט ההגדרה הסתומה. אם $j = 1$ הנקודה e_1 אינה מקיימת את המשוואה כי $\cos 1 \neq 1$. כל נקודה x שמקיימת את המשוואה מקיימת $|x| = \cos([x]_j) \leq 1$. אם מוחקים מ- e_1 שיעור $i \neq 1$ מה שנותן זה וקטור יחידה ובכל סביבה שלו יהיה וקטור $\mathbf{R}^{k-1}$ שאורכו יותר מ-1 ולכן לא ניתן להשלימו לוקטור שהוא פתרון של המשוואה (ושאורכו אינו עולה על 1). לכן אם $i \neq 1$ לא ייתכן שהמשוואה מגדירה שיעור $[x]_i$ כפונקציה של שאר שיעורי הנקודה.

לשאלה 4: מן הסתם יש דרכים שונות להוכיח זאת.

אפשר אולי להציג $U_i \cap S_i = \{x \in U_i \mid F_i(x) = 0\}$ לפי חלק ב של משפּו 11.ג.7, ולקחת $U = U_1 \cap U_2$ (כך שבה"כ $U = U_1 = U_2$). המטריצות $J_i = J(F_i)_a$ בעלות דרגה מלאה (שהיא $k - d_i$ עם $d_i = \dim T_a(S_i)$). כעת $U \cap S_1 \cap S_2 = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$ עם

$$J = JF_a = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}. \quad F = (F_1, F_2)$$

כמוכן מאבחנה 9.ד.7 מתקיים $T_a(S_i) = \{u \in \mathbf{R}^k \mid J_i u^T = 0\}$ ולכן:

$$\{0\} = T_a(S_1) \cap T_a(S_2) = \{u \in \mathbf{R}^k \mid Ju^T = 0\}$$

ומכאן שדרגת J היא k . לכן נוכל לבחור בה k שורות בלתי תלויות, וזה מקביל לבחירת k רכיבים מרכיבי F לקבלת $\hat{F}$ עם $J\hat{F}_a$ הפיכה. כמוכן $\hat{F}$ גם גזירה ברציפות ב- U וממשפט הפונקציה ההופכית נקבל שיש סביבה $B \subseteq U$ של a שבה $\hat{F}$ חד־חד־ערכית ולכן:

$$V \cap S_1 \cap S_2 = \{x \in V \mid F(x) = 0\} \subseteq \{x \in V \mid \hat{F}(x) = 0\} = \{a\}$$

אני מקווה שהשיקולים אכן כולם נכונים...

לשאלה 5: 2021 \ 3 \ (53=93).

מנוסחת פיתוח הדטרמיננטה:

$$\xi(J\varphi_a) \cdot \nabla f(a) = \det M(\nabla f(a); J\varphi_a)$$

ממשפט 11.ה.7 ("כופלי לגרנז'") שורות המטריצה $M(\nabla f(a); J\varphi_a)$ תלויות לינארית.

לשאלה 6: 2019 \ 4 \ 13.

נוח להחליף את f ב- $\frac{1}{f}$ שאפשר להרחיב ברציפות לסגור של D , ולהראות שיש לה ערך מרבי בסגור (לפי וויירשטראס) שמתקבל ב- D . אז אפשר לחלק את D לארבעה חלקים בהתאם לאישוויונות (שוויון או אי־שוויון חד) ובכל אחד פתוח או הוא חלק מקבוצה פתוחה שמוגדר בעזרת אילוף או שניים, ומשתמשים במשפט פרמה או כופלי לגרנז' לקבל מגבלות על נקודות הקיצון.