

מתווה לפתרון ממ"ן 12

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 סמסטר: 2022
 חומר הלימוד למטלה: פרקים 4–7
 משקל המטלה: 5 נקודות

לרוב השאלות כמה וכמה דרכי פתרון.
 מובאת כאן בדרך כלל דרך אחת, שאינה בהכרח הדרך הטובה ביותר.

שאלה 1 (15 נקודות)

תהי $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} x(y-1) & x \leq y \\ (x-1)y & x > y \end{cases}$$

תהי $v: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ונגדיר פונקציה $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי:

$$t \mapsto \int_0^1 g(x, t) v(x) dx$$

הוכיחו ש- u גזירה פעמיים בקטע $(0, 1)$ ומתקיים $u''(t) = v(t)$ לכל $t \in (0, 1)$.

פתרון

ראשית נשים לב שלכל $t \in (0, 1)$ מתקיים:

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 g(x, t) v(x) dx = \int_0^t g(x, t) v(x) dx + \int_t^1 g(x, t) v(x) dx \\ &= \int_0^t x(t-1) v(x) dx + \int_t^1 (x-1)t v(x) dx = u_1(t) + u_2(t) \end{aligned}$$

לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ נסמן $f_1(x, t) = x(t-1)v(x)$ ו- $f_2(x, t) = (x-1)t v(x)$. שתי הפונקציות האלה

רציפות בריבוע $[0, 1] \times [0, 1]$ וגם הנגזרת החלקית של כל אחת מהן לפי t קיימת ורציפה בכל

נקודה בריבוע הזה:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}(x, t) = xv(x)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t}(x, t) = (x-1)v(x)$$

לכל t נסמן $\alpha_1(t) = 0$ ו- $\beta_1(t) = t$. אז לכל t

$$u_1(t) = \int_{\alpha_1(t)}^{\beta_1(t)} f_1(x, t) dx$$

ולכן לפי משפט 3.4.3 לכל $t \in (0, 1)$ מתקיים:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= f_1(\beta_1(t), t) \beta_1'(t) - f_1(\alpha_1(t), t) \alpha_1'(t) + \int_{\alpha_1(t)}^{\beta_1(t)} \frac{\partial f_1}{\partial t}(x, t) dx \\ &= f_1(t, t) \cdot 1 - f_1(0, t) \cdot 0 + \int_0^t \frac{\partial f_1}{\partial t}(x, t) dx = t(t-1)v(t) + \int_0^t xv(x) dx \end{aligned}$$

$$u_2(t) = \int_{\alpha_2(t)}^{\beta_2(t)} f_2(x, t) dx \quad \text{בדומה לכל } t \text{ נסמן } \alpha_2(t) = t \text{ ו-} \beta_2(t) = 1, \text{ ואז לכל } t$$

ולפי משפט 3.4.ה לכל $t \in (0, 1)$ מתקיים:

$$\begin{aligned} u_2'(t) &= f_2(\beta_2(t), t) \beta_2'(t) - f_2(\alpha_2(t), t) \alpha_2'(t) + \int_{\alpha_2(t)}^{\beta_2(t)} f_2(x, t) dx \\ &= f_2(1, t) \cdot 0 - f_2(t, t) \cdot 1 + \int_t^1 \frac{\partial f_2}{\partial t}(x, t) dx = -(t-1)tv(t) + \int_t^1 (x-1)v(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'(t) &= u_1'(t) + u_2'(t) = t(t-1)v(t) + \int_0^t xv(x) dx - (t-1)tv(t) + \int_t^1 (x-1)v(x) dx \quad \text{לכן} \\ &= \int_0^t xv(x) dx + \int_t^1 (x-1)v(x) dx = \left(\int_0^t v(x) dx + \int_0^t (x-1)v(x) dx \right) + \int_t^1 (x-1)v(x) dx \\ &= \int_0^t v(x) dx + \int_0^1 (x-1)v(x) dx = \int_0^t v(x) dx + C \end{aligned}$$

כאשר $C = \int_0^1 (x-1)v(x) dx$ הוא קבוע. כעת לפי המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי

$$u''(t) = v(t) + \frac{dC}{dt} = v(t) + 0 = v(t) \quad \text{והאינטגרלי מתקיים:}$$

שאלה 2 (15 נקודות)

בשאלה זאת נשתמש בעובדה אחת שמוכחת בקורס אלגברה לינארית 2: מטריצה ממשית סימטרית היא לכסינה, ובעובדה נוספת מהקורס אלגברה לינארית 1: למטריצות דומות אותה עקבה. הראו שמעובדות אלה נובע שאם A היא מטריצה סימטרית חיובית ו- $\operatorname{tr} A = 0$ אז $A = 0$. נעבור לעיקר השאלה:

תהי U קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^k$. פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $\mathbb{R}$ נקראת פונקציה הרמונית בקבוצה

$$\text{הפתוחה } U \text{ אם היא גזירה פעמיים ברציפות ב-} U \text{ ומתקיים } \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = 0 \text{ לכל } a \in U.$$

הוכיחו שאם f פונקציה הרמונית ב- U ובנוסף לכל $a \in U$ מתקיים $\nabla f(a) \neq 0$ או $Hf_a \neq 0$ אז $f(U)$ היא קבוצה פתוחה.

הערה: אפשר להוכיח שאם f הרמונית ואינה קבועה אז $f(U)$ פתוחה, גם ללא ההנחות הנוספות שהנחנו כאן, באמצעים שנלמדים בקורס משוואות דיפרנציאליות חלקיות, או באמצעים שנלמדים בקורס פונקציות מרוכבות.

פתרון

ראשית תהי A מטריצה ממשית סימטרית כך ש- $\operatorname{tr} A = 0$. כאמור בשאלה A דומה למטריצה אלכסונית ממשית בעלת אותה עקבה, כלומר סכום איברי האלכסון של המטריצה האלכסונית הוא 0. אם $A \neq 0$ אז גם המטריצה האלכסונית אינה מטריצת האפס, וכיוון שסכום איברי האלכסון שלה הוא 0, לפחות אחד מאיברי האלכסון הוא מספר שלילי. איברי האלכסון של המטריצה האלכסונית הדומה ל- A הם ערכים עצמיים של A , ולכן יש ל- A ערך עצמי שלילי λ . ואם u וקטור עצמי שמתאים לערך העצמי הזה אז $u^T A u = u^T (\lambda u) = \lambda u^T u = \lambda |u|^2 < 0$ ולכן המטריצה A אינה חיובית. לכן המטריצה הסימטרית החיובית היחידה בעלת עקבה אפס היא מטריצת האפס.

נעבור לעיקר: די להראות שלכל $a \in U$ יש סביבה של $f(a)$ שמוכלת ב- $f(U)$.

אם $\nabla f(a) \neq 0$ אז לפי משפט 10.ב.6 אינה נקודת קיצון. אחרת $Hf_a \neq 0$. בנוסף Hf_a מטריצה

$$\text{ממשית סימטרית לפי טענה 8.ב.5. כמוכן } \operatorname{tr} Hf_a = \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = 0 \text{ כי } f \text{ הרמונית בסביבת } a.$$

לכן כפי שראינו Hf_a מטריצה שאינה חיובית. גם $-Hf_a$ היא מטריצה ממשית סימטרית בעלת עקבה אפס שאינה מטריצת האפס, ולכן אינה מטריצה חיובית, כלומר Hf_a אינה מטריצה שלילית. כיוון ש- Hf_a מטריצה שאינה חיובית ואינה שלילית, עולה ממסקנה 3.ד.6 ש- a אינה נקודת קיצון מקומית של f .

עד כה הראינו שאין ל- f נקודות קיצון מקומיות ב- U . תהי $a \in U$ ונבחר B סביבה כדורית פתוחה של a שמוכלת ב- U . לפי אבחנה 3.ב.6 אין לפונקציה נקודות קיצון ב- B , ולכן לקבוצה $f(B)$ אין מינימום ואין מקסימום. הקבוצה B קשורה מסילתית ולכן לפי טענה 2.ט.2 $f(B)$ קשורה מסילתית. לפי טענה 10.ט.2 $f(B)$ קמורה. לבסוף, הערה 15.ג.1 מפרטת את כל הקבוצות

הקמורות ב- $\mathbb{R}$, ומתוכן כל אלה שאין להן מינימום ואין להן מקסימום הן קבוצות פתוחות. לכן $f(B)$ היא סביבה פתוחה של $f(a)$ שמוכלת ב- $f(U)$.
לכל נקודה $y \in f(U)$ יש $a \in U$ כך ש- $y = f(a)$, וראינו שיש סביבה של y שמוכלת ב- $f(U)$.
לכן $f(U)$ היא קבוצה פתוחה.

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי $k \geq 3$, ונסמן $x = (x_1, \dots, x_k)$.

קבעו עבור אילו זוגות של אינדקסים i ו- j המשוואה $|x| - \cos(x_j) = 0$ מגדירה באופן סתום

את x_i כפונקציה של שאר רכיבי x בסביבה של הנקודה $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$.

נמקו היטב מדוע עבור זוגות אלה המשוואה מגדירה פונקציה, ומדוע בכל שאר המקרים היא אינה מגדירה פונקציה.

פתרון

הזוגות (i, j) המבוקשים הם בדיוק אלה שבהם $i = 1$ ו- $j \neq 1$. נראה זאת.

ראשית, נסמן $F(x) = F(x_1, \dots, x_k) = |x| - \cos x_j$. המשוואה הנתונה היא $F(x) = 0$.

אם $j = 1$ אז $F(x) = |x| - \cos x_1$ ו- $F(e_1) = F(1, 0, \dots, 0) = |e_1| - \cos 1 = 1 - \cos 1 \neq 0$, כלומר e_1

אינו פתרון של המשוואה $F(x) = 0$, ולכן המשוואה בודאי אינה מגדירה באופן סתום אף משתנה

כפונקציה של שאר המשתנים בסביבה של e_1 (לא מתקיימים תנאי מינוח 4.ב.7 שכן המשוואה

$$F(x) = 0 \text{ כלל אינה המשוואה } F(e_1) = F(1, 0, \dots, 0) = |e_1| - \cos 0 = 1 - 1 = 0.$$

נמשיך בהנחה ש- $j \neq 1$. במקרה זה $F(e_1) = F(1, 0, \dots, 0) = |e_1| - \cos 0 = 1 - 1 = 0$, כלומר e_1 הוא

פתרון של המשוואה $F(x) = 0$, והמשוואה $F(x) = 0$ היא אכן המשוואה $F(x) = F(e_1)$.

אם גם $i \neq 1$ יש להראות שהמשוואה אינה מגדירה את x_i כפונקציה של שאר המשתנים בסביבה

של e_1 . כדי להשתמש בסימוני מינוח 4.ב.7 על x_i להיות השיעור האחרון של הנקודה x (כלומר

$i = k$). אם $1 < i < k$ אז כמו שנאמר בהערה 7.ב.7, נוכל לשנות את סדר שיעורי הנקודות כדי

לשים אותו בסוף. במילים אחרות: במקרה זה נחליף בין מיקומי השיעור ה- i והשיעור ה- k .

החלפה זאת לא תשנה את נתוני המשוואה $|x| - \cos x_j = 0$ (אם במקרה $i = j$ או $j = k$ נצטרך גם

להחליף את j ב- k או ב- i , אבל לא תשתנה הדרישה $j \neq 1$). ההחלפה גם לא תשנה את הוקטור

e_1 כי שני אפסים יתחלפו במקומותיהם. ובכן נוכל להניח ללא הגבלת הכלליות במקרה זה ש-

$i = k$ ולהראות שהמשוואה $F(x) = F(e_1)$ אינה מגדירה את x_k כפונקציה של שאר המשתנים

בסביבה של e_1 . בסימוני מינוח 4.ב.7 עכשיו יש לנו $x = (x_1, \dots, x_{k-1})$ ו- $y = x_k$, וכן

$a = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{k-1}$ ו- $b = 0$. אם נניח בשלילה שהמשוואה $F(x, y) = F(a, b)$ מגדירה באופן

סתום את $y = x_k$ כפונקציה של שאר המשתנים בסביבה של $(a, b) = e_1$ אז יש סביבה U של a

וסביבה W של $b = 0$ כך שהמשוואה הזאת מגדירה באופן סתום את y כפונקציה של שאר

המשתנים בקבוצה $U \times W$. הסביבה U מכילה כדור סגור כלשהו סביב a . נסמן את רדיוס

הכדור ב- δ . אז $(1 + \delta, 0, \dots, 0) \in U$, והפונקציה שמוגדרת באופן סתום על ידי המשוואה מתאימה

לו איזשהו איבר $w \in W$. פירוש הדבר שהוקטור $(1 + \delta, 0, \dots, 0, w)$ הוא פתרון של המשוואה

$$F(x) = 0. \text{ המספר } \delta \text{ הוא חיובי, כרדיוס של כדור, ולכן } 1 < 1 + \delta \leq |(1 + \delta, 0, \dots, 0, w)| = \cos x_j \leq 1$$

וקיבלנו סתירה. לכן בניגוד להנחת השלילה המשוואה הנתונה אינה מגדירה את x_i באופן סתום כפונקציה של שאר המשתנים בסביבה של e_1 , כאשר $i \neq 1$ וגם $j \neq 1$ נותר להראות שכאשר $i = 1$ ו- $j \neq 1$ המשוואה מגדירה את x_1 כפונקציה של שאר המשתנים, כלומר כפונקציה של $(x_2, \dots, x_k)$. לשם כך נוכל לנצל את משפט ההגדרה הסתומה (משפט 3.7.3).
 שוב, ניסוח המשפט דורש שהמשתנה x_1 יהיה מימין לכל שאר המשתנים אבל באופן טבעי הוא משמאל לכולם (שוב [התבלבלו השמאל והימין](#)). ובכן, שוב, לפי הערה 7.7.3, נוכל לחלק את המשתנים אחרת. הפעם, במקום לשנות את הסדר ולהעביר את x_1 לסוף, נחשוב על זה אחרת:
 מאחר ש- $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציה סקלרית, מטריצת היעקוביאן $JF_{e_1} = JF_{(a,b)}$ היא וקטור שורה, ובסימוני משפט 3.7.3 $r = 1$ ו- $l = k - 1$, והמטריצה $R_{(a,b)}$ היא מטריצה 1×1 שעמודותיה הן העמודה האחרונה של $JF_{(a,b)}$, כלומר למעשה הרכיב האחרון של וקטור השורה. אלא שהמשתנה שלנו x_1 הוא דוקא הראשון ולא האחרון, אז פשוט המטריצה $R_{(a,b)}$ תהיה הרכיב הראשון של הוקטור $JF_{(a,b)}$. זאת מטריצה 1×1 , כלומר סקלר, וכדי לבדוק שהיא הפיכה די לראות שזה סקלר שאינו 0. הפונקציה שלנו היא $F(x) = |x| - \cos x_j$. בעזרת שאלה 10.3 ו-10, טענה 3.7.12 וכלל השרשרת נקבל ש- F גזירה בכל $x \neq 0$ ומתקיים:

$$Jf_x = \nabla f(x) = \frac{1}{|x|}x + (\sin x_j)e_j$$

 ולכן F גזירה ברציפות בכל נקודה ב- $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ ובפרט היא גזירה ברציפות בסביבת e_1 .
 כמובן $Jf_{e_1} = \frac{1}{|e_1|}e_1 + (\sin 0)e_j = e_1$ (כי $j \neq 1$) והרכיב הראשון של JF_{e_1} הוא $R_{(a,b)} = 1$. זה לא 0, כלומר זאת מטריצה 1×1 הפיכה, ולכן לפי משפט ההגדרה הסתומה המשוואה $F(x) = F(e_1)$ (כלומר המשוואה $F(x) = 0$) מגדירה באופן סתום את x_1 כפונקציה של שאר המשתנים בסביבה של e_1 .

שאלה 4 (15 נקודות)

תהיינה S_1 ו- S_2 יריעות חלקות ב- $\mathbf{R}^k$. תהי $a \in S_1 \cap S_2$.

הוכיחו שאם $T_a(S_1) \cap T_a(S_2) = \{0\}$ אז יש סביבה U של a כך ש- $U \cap S_1 \cap S_2 = \{a\}$.
הפריכו את הטענה ההפוכה בעזרת דוגמה נגדית.

פתרון

נתחיל בדוגמה הנגדית לטענה ההפוכה.

היריעות תהיינה למשל $S_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 0\}$ ו- $S_2 = G(x \mapsto x^2) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x^2\}$.

ניקח $a = (0, 0)$ ו- $U = \mathbf{R}^2$ סביבה פתוחה שלה. אז ברור שמתקיים:

$$U \cap S_1 \cap S_2 = \{(x, y) \mid y = x^2 = 0\} = \{(0, 0)\} = \{a\}$$

לוי היתה הטענה ההפוכה נכונה היה מתקיים $T_a(S_1) \cap T_a(S_2) = \{0\}$, אבל נראה שאין זה כך על-

ידי כך שנראה ש- $e_1 \in T_a(S_1) \cap T_a(S_2)$. הקבוצה S_1 היא תת-מרחב לינארי חד-ממדי של $\mathbf{R}^2$,
ובפרט מרחב אפני, ולפי שאלה 11.7.7 היא המרחב המשיק לעצמה בכל נקודה שעליה, ובפרט
בנקודה $a = (0, 0)$ מתקיים $e_1 \in S_1 = T_a(S_1)$.

הקבוצה S_2 היא הגרף של הפונקציה $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ שהיא פונקציה גזירה ברציפות, ולכן לפי
דוגמה 7.7.7 זאת יריעה חלקה, ולפי דוגמה 10.7.7 אפשר להסיק שהמרחב המשיק לה בנקודה
 $a = (0, 0)$ שהוא גם המרחב הלינארי $T_a(S_2)$ הוא:

$$T_a(S_2) = \{(x, y) \mid y = f(0) + f'(0 \cdot x) \cdot x\} = \{(x, y) \mid y = 0 + 0 \cdot x\} = \{(x, y) \mid y = 0\} = S_1$$

וכפי שראינו e_1 מצא בקבוצה הזאת (למעשה מצאנו שבדוגמה $(T_a(S_1) \cap T_a(S_2) = S_1 \neq \{0\})$.

נעבור להוכחת הכיוון העיקרי: נסמן ב- d_i את ממד היריעה S_i . לפי טענה 2.7.2 $d_i = \dim T_a(S_i)$.

מחלק ב של משפט 11.7.7 נקבל שיש סביבה פתוחה U_i של a ופונקציה $F_i: U_i \rightarrow \mathbf{R}^{k-d_i}$ שגזירה

ברציפות בקבוצה U_i כך שהמטריצה $J(F_i)_a$ בעלת דרגה מלאה, כלומר דרגתה היא $k - d_i$,

ומתקיים: $S_i \cap U_i = \{x \in U_i \mid F_i(x) = 0\}$

(נוכל להניח ללא הגבלת הכלליות ש- $F_i(a) = 0$).

האיסוף $F = (F_1, F_2)$ היא פונקציה גזירה ברציפות בקבוצה $U = U_1 \cap U_2$, ולכל נקודה $x \in U$

מתקיים: $JF_x = \begin{pmatrix} J(F_1)_x \\ J(F_2)_x \end{pmatrix}$

בפרט נסמן: $J = JF_a = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$, $J_1 = J(F_1)_a$, $J_2 = J(F_2)_a$

לפי אבחנה 8.7.7 מתקיים: $T_a(S_i) = \{u \in \mathbf{R}^k \mid uJ_i^T = 0^{[k-d_i]}\}$

$$\begin{aligned}
T_a(S_1) \cap T_a(S_2) &= \left\{ u \in \mathbf{R}^k \mid uJ_1^T = 0^{[k-d_1]} \right\} \cap \left\{ u \in \mathbf{R}^k \mid uJ_2^T = 0^{[k-d_2]} \right\} \\
&= \left\{ u \in \mathbf{R}^k \mid u(J_1^T, J_2^T) = 0 \right\} = \left\{ u \in \mathbf{R}^k \mid uJ^T = 0^{[2k-d_1-d_2]} \right\} \\
&= \left\{ u \in \mathbf{R}^k \mid uJ^T = 0^{[2k-d_1-d_2]} \right\} = \{0\}
\end{aligned}$$

לכן :

נתון $T_a(S_1) \cap T_a(S_2) = \{0\}$ ולכן :

קיבלנו שמערכת המשוואות הלינאריות ההומוגניות $xJ^T = 0$ היא מערכת של $2k - d_1 - d_2$ משוואות ב- k נעלמים שיש לה פתרון טריוויאלי בלבד. לפי אלגברה לינארית זה שקול לכך שדרגת המטריצה J היא k . נוכל להסיק מכך למשל שבמערכת לפחות k משוואות, כלומר $k \leq 2k - d_1 - d_2$ ולכן $d_1 + d_2 \leq k$, אבל זה לא מה שדרוש לנו כאן.

למטריצה J יש k עמודות (שמתאימות למשתנים $x_1, \dots, x_k$) ו- $2k - d_1 - d_2$ שורות (כמספר רכיבי הפונקציה F). כיוון שדרגתה k יש בה k שורות בלתי תלויות לינאריות. נגדיר פונקציה חלקית G מ- $\mathbf{R}^k$ ל- $\mathbf{R}^k$ שרכיביה הם רכיבי F המתאימים לשורות אלה. כיוון שכל רכיבי F הם פונקציות גזירות ברציפות ב- U הפונקציה G גזירה ברציפות ב- U . מטריצת היעקוביאן JG_a היא המטריצה המורכבת מאותן k שורות בלתי תלויות לינאריות של $J = JF_a$, ולכן זאת מטריצה $k \times k$ הפיכה. לפי משפט הפונקציה ההופכית יש כדור פתוח B שמוכל ב- U כך ש- $G|_B$ חד-חד-ערכית. בפרט :

$$\{x \in B \mid G(x) = 0\} = \{x \in B \mid G(x) = G(a)\} = \{a\}$$

מאחר שרכיבי G הם חלק מרכיבי F ברור ש-

$$\{x \in B \mid F(x) = 0\} \subseteq \{x \in B \mid G(x) = 0\} = \{a\}$$

ומאחר ש- $F(a) = 0$ הרי :

$$\{x \in B \mid F(x) = 0\} = \{a\}$$

הכדור הפתוח B הוא סביבה של a , וכן $B \subseteq U \subseteq U_i$. אז :

$$\begin{aligned}
B \cap S_i &= B \cap S_i \cap U_i = B \cap \{x \in U_i \mid F_i(x) = 0\} = \{x \in B \mid F_i(x) = 0\} \\
B \cap S_1 \cap S_2 &= \{x \in B \mid F_1(x) = 0\} \cap \{x \in B \mid F_2(x) = 0\} = \{x \in B \mid F(x) = 0\} = \{a\}
\end{aligned}$$

לכן :

שאלה 5 (15 נקודות)

למטריצה A מסדר $(k-1) \times k$ נסמן ב- A_i את המטריצה מסדר $(k-1) \times (k-1)$ שמתקבלת ממחיקת העמודה ה- i של המטריצה A . נסמן:

$$\xi(A) = (\det A_1, -\det A_2, \dots, (-1)^{k-1} \det A_k)$$

תהי U קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^k$. תהי $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ שגזירה ב- U ותהי $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$ שגזירה ברציפות ב- U . הוכיחו שאם a היא נקודת קיצון של f בקבוצה $\{x \in U \mid \varphi(x) = 0^{[k-1]}\}$ אז הוקטור $\nabla f(a)$ ניצב לוקטור $\xi(J\varphi_a)$. (היזכרו בנוסחת הפיתוח של דטרמיננטה).

פתרון

בעמוד 48 בכרך א הסימון $M(u, v, w)$ שימש לציון המטריצה ששורותיה הן u, v, w . בדומה נסמן ב- $M(u; A)$ את המטריצה ששורתה הראשונה היא u ושאר שורותיה הן $k-1$ השורות של המטריצה A . נוסחת פיתוח הדטרמיננטה לפי השורה הראשונה היא:

$$\det(M(u; A)) = \sum_{i=1}^k (-1)^{1+i} u_i \det A_i = u_1 \det A_1 - u_2 \det A_2 + \dots \pm u_k \det A_k = u \cdot \xi(A)$$

$$\det M(\nabla f(a); J\varphi_a) = \nabla f(a) \cdot \xi(J\varphi_a) \quad \text{בפרט:}$$

הוקטור $\nabla f(a)$ ניצב לוקטור $\xi(J\varphi_a)$ אם ורק אם $\nabla f(a) \cdot \xi(J\varphi_a) = 0$, כלומר אם ורק אם

$$\det M(\nabla f(a); J\varphi_a) = 0, \quad \text{כלומר אם ורק אם המטריצה } M(\nabla f(a); J\varphi_a) \text{ סינגולרית.}$$

נתון ש- a היא נקודת קיצון של f בקבוצה $\{x \in U \mid \varphi(x) = 0^{[k-1]}\}$. הקבוצה U פתוחה, ולכן

היא סביבה של a , ולכן a היא נקודת קיצון מקומית של f תת האילוץ $\varphi = 0$. הפונקציה f גזירה ב- a ו- φ גזירה ברציפות בסביבה הפתוחה U של a , ולכן לפי משפט 11.7 ה.7 (כופלי לגרנז') קבוצת הוקטורים $\{\nabla f(a), \nabla[\varphi]_1(a), \dots, \nabla[\varphi]_{k-1}(a)\}$ תלויה לינארית. הוקטור $\nabla[\varphi]_i(a)$ הוא השורה ה- i של המטריצה $J\varphi_a$, ולכן קבוצת הוקטורים התלויה לינארית היא קבוצת השורות של המטריצה $M(\nabla f(a); J\varphi_a)$, ולכן המטריצה הזאת היא סינגולרית, וכאמור דבר זה שקול לכך

$$\nabla f(a) \text{ ניצב לוקטור } \xi(J\varphi_a).$$

הערה: שימו לב שאם $k=3$ ו- φ היא האיסוף $\varphi = (g, h)$ אז $\xi(J\varphi_a) = \nabla g(a) \times \nabla h(a)$ (מכפלה וקטורית).

שאלה 6 (20 נקודות)

תהי $f: (0, \infty)^3 \rightarrow \mathbb{R}$ שמוגדרת על ידי:

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{x^2 y^3 z^5}$$

הראו שיש ל- f ערך מזערי בקבוצה

$$D = \left\{ (x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x \geq y, x^4 + y^4 + z^4 \leq 1 \right\}$$

ומצאו אותו.

פתרון

ברור שכל איברי תמונת f הם מספרים חיוביים. הפונקציה $t \mapsto \frac{1}{t}$ היא פונקציה יורדת ולכן

בבירור הערך המזערי של f הוא הערך המרבי של הפונקציה $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$. נעזר אם כן בפונקציה

$p: (x, y, z) \mapsto x^2 y^3 z^5$ שהיא פולינום ולכן גזירה ברציפות בכל המרחב.

נעזר גם בקבוצה

$$K = \left\{ (x, y, z) \in [0, \infty)^3 \mid x \geq y, x^4 + y^4 + z^4 \leq 1 \right\}$$

$$= \left\{ (x, y, z) \mid x \geq y \geq 0, z \geq 0, x^4 + y^4 + z^4 \leq 1 \right\}$$

שמכילה את הקבוצה D . לפי מסקנה 25.ד.2 K היא קבוצה סגורה, וכן:

$$\partial K \subseteq \left\{ (x, y, z) \in K \mid x^4 + y^4 + z^4 = 1 \right\} \cup \left\{ (x, y, z) \in K \mid x = y \right\}$$

$$\cup \left\{ (x, y, z) \in K \mid y = 0 \right\} \cup \left\{ (x, y, z) \in K \mid z = 0 \right\}$$

אם $x = (x_1, x_2, x_3) \in K$ אז $x_i \geq 0$ עבור $i = 1, 2, 3$ וגם $x_i^4 \leq x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \leq 1$ ולכן $x_i \in [0, 1]$.

לכן $K \subseteq [0, 1]^3$ ובפרט K היא קבוצה חסומה. הפולינום p הוא פונקציה רציפה ב- K ולפי משפט ויירשטראס (משפט 4.א.6) יש ל- p ערך מרבי ב- K . נמצא אותו.

נגזור את p :

$$\nabla p(x, y, z) = (2xy^3z^5, 3x^2y^2z^5, 5x^2y^3z^4)$$

אם הערך המרבי מתקבל בנקודה פנימית (x, y, z) ב- K אז בפרט זאת נקודת מקסימום מקומי.

לכן $\nabla p(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ובפרט $2xy^3z^5 = \frac{\partial p}{\partial x}(x, y, z) = 0$ ולכן $x = 0$ או $y = 0$ או $z = 0$ ובכל

מקרה $p(x, y, z) = x^2 y^3 z^5 = 0$. אבל זה בודאי לא הערך המרבי של p ב- K , שכן למשל

$$p\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} > 0 \text{ ו- } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in K$$

אם כך נקודת המקסימום של p ב- K אינה נקודה פנימית, ולכן היא נקודת שפה של K . כמוכן

השיקול לעיל הראה שאף אחד משיעוריה אינו 0, ולכן היא בהכרח נמצאת בקבוצה:

$$\left\{ (x, y, z) \in K \cap (0, \infty)^3 \mid x^4 + y^4 + z^4 = 1 \right\} \cup \left\{ (x, y, z) \in K \cap (0, \infty)^3 \mid x = y \right\}$$

תוכלו לבדוק שהקבוצה הזאת שווה לאיחוד $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ כאשר :

$$A_1 = \{(x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x > y, x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$$

$$A_2 = \{(x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x = y, x^4 + y^4 + z^4 < 1\}$$

$$A_3 = \{(x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x = y, x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$$

אם נקודת המקסימום של p בקבוצה K נמצאת בתת-קבוצה A_i , אז היא נקודת מקסימום של p ב- A_i . נבדוק מה יכולות להיות נקודות הקיצון בכל אחת משלוש הקבוצות האלה.

את הקבוצה A_1 נוכל להציג בצורה :

$$A_1 = \{(x, y, z) \in U_1 \mid x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$$

$$U_1 = \{(x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x > y\}$$

הקבוצה U_1 פתוחה. זה נובע למשל מחלק א של מסקנה 23.ד.2 יחד עם חלק ב של טענה 24.א.2.

לכן נקודת המקסימום של p ב- A_1 היא נקודת קיצון מקומי של p תחת האילוץ $\varphi = 1$ כאשר

$\varphi(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$. ממשפט 11.ה.7 (כופלי לגרנז') נקבל שאם $a = (x, y, z)$ היא נקודת המקסימום הזאת אז הקבוצה

$$\{\nabla p(a), \nabla \varphi(a)\} = \{(2xy^3z^5, 3x^2y^2z^5, 5x^2y^3z^4), (4x^3, 4y^3, 4z^3)\}$$

תלויה לינארית. זאת קבוצת השורות של המטריצה :

$$\begin{pmatrix} 2xy^3z^5 & 3x^2y^2z^5 & 5x^2y^3z^4 \\ 4x^3 & 4y^3 & 4z^3 \end{pmatrix}$$

ולכן זאת מטריצה שדרגתה לכל היותר 1, ולכן כל תת-מטריצה 2×2 שלה היא סינגולרית. לכן

למשל מתקיים :

$$\det \begin{pmatrix} 2xy^3z^5 & 3x^2y^2z^5 \\ 4x^3 & 4y^3 \end{pmatrix} = 0$$

$$4(2xy^6z^5 - 3x^5y^2z^5) = 0 \Rightarrow 2y^4 = 3x^4$$

אבל מאחר ש $(x, y, z) \in A_1$ מתקיים גם $x > y$ ולכן $x^4 > y^4$ ולכן $2x^4 > 2y^4 = 3x^4$ כלומר $0 > x^4$

וזאת סתירה. לכן אין נקודת קיצון של p ב- A_1 , ונקודת המקסימום של p ב- K אינה ב- A_1 .

נעבור ל- A_2 . נוכל למשל להציג אותה בצורה

$$A_2 = \{(x, y, z) \in U_1 \mid x - y = 0\}$$

הקבוצה U_2 פתוחה, למשל לפי חלק א של מסקנה 23.ד.2 יחד עם חלק ב של טענה 24.א.2.

לכן נקודת המקסימום של p ב- A_2 היא נקודת קיצון מקומי של p תחת האילוץ $\psi = 1$ כאשר

$\psi(x, y, z) = x - y$. ממשפט 11.ה.7 (כופלי לגרנז') נקבל שאם $a = (x, y, z)$ היא נקודת

המקסימום הזאת אז הקבוצה

$$\{\nabla p(a), \nabla \psi(a)\} = \{(2xy^3z^5, 3x^2y^2z^5, 5x^2y^3z^4), (1, -1, 0)\}$$

תלויה לינארית. זאת קבוצת השורות של המטריצה :

$$\begin{pmatrix} 2xy^3z^5 & 3x^2y^2z^5 & 5x^2y^3z^4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן זאת מטריצה שדרגתה לכל היותר 1, ולכן כל תת-מטריצה 2×2 שלה היא סינגולרית. בפרט

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2xy^3z^5 & 5x^2y^3z^4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -5x^2y^3z^4 \quad \text{למשל}$$

ולכן $x=0$ או $y=0$ או $z=0$ בסתירה לכך ש- $(x,y,z) \in A_2$. אז נקודת המקסימום המבוקשת גם אינה ב- A_2 . לכן היא בהכרח ב- A_3 . כזכור:

$$A_3 = \left\{ (x,y,z) \in (0,\infty)^3 \mid x=y, x^4+y^4+z^4=1 \right\} \\ = \left\{ (x,y,z) \in (0,\infty)^3 \mid \varphi(x,y,z)=1, \psi(x,y,z)=0 \right\}$$

הקבוצה $(0,\infty)^3$ פתוחה ולכן היא סביבה של כל נקודה ב- A_3 ולכן נקודת המקסימום המבוקשת

היא נקודת קיצון מקומית של p תחת זוג האילוצים $\{\varphi=1, \psi=0\}$. לפי משפט 11.7, אם

$a=(x,y,z)$ היא נקודת הקיצון הזאת, הקבוצה $\{\nabla p(a), \nabla \varphi(a), \nabla \psi(a)\}$ תלויה לינארית. זאת

$$\begin{pmatrix} 2xy^3z^5 & 3x^2y^2z^5 & 5x^2y^3z^4 \\ 4x^3 & 4y^3 & 4z^3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{קבוצת השורות של המטריצה:}$$

לכן המטריצה הזאת סינגולרית, ומכאן:

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2xy^3z^5 & 3x^2y^2z^5 & 5x^2y^3z^4 \\ 4x^3 & 4y^3 & 4z^3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 4xy^2z^4 \det \begin{pmatrix} 2yz & 3xz & 5xy \\ x^3 & y^3 & z^3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ = 4xy^2z^4 \left(\det \begin{pmatrix} 3xz & 5xy \\ y^3 & z^3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2yz & 5xy \\ x^3 & z^3 \end{pmatrix} \right) = 4xy^2z^4 (3xz^4 - 5xy^4 + 2yz^4 - 5x^4y)$$

$$3xz^4 - 5xy^4 + 2yz^4 - 5x^4y = 0 \quad \text{לכן:}$$

בנוסף מכך ש- $(x,y,z) \in A_3$ נובע ש- $x=y$ וש- $x^4+y^4+z^4=1$ ולכן $z^4=1-2x^4$ והצבה בשוויון

$$3x(1-2x^4) - 5x^5 + 2x(1-2x^4) - 5x^5 = 0 \quad \text{מהשווה הקודמת נותנת:}$$

$$5x(1-2x^4) - 10x^5 = 0$$

$$1-2x^4-2x^4=0 \Rightarrow 4x^4=1 \Rightarrow x^4=\frac{1}{4} \Rightarrow x^2=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x=y=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow z^4=1-2x^4=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow z=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

קיבלנו אם כן שלפונקציה p בהכרח יש נקודת מקסימום בקבוצה הסגורה והחסומה K

ושנקודת המקסימום הזאת היא בהכרח הנקודה $a = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$. לכן הערך המרבי של p

$$p(a) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^5 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^5 = \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^5 \left(2^{-\frac{1}{4}}\right)^5 = 2^{-\frac{5}{2}} \cdot 2^{-\frac{5}{4}} = 2^{-\frac{15}{4}} \quad \text{בקבוצה } K \text{ הוא}$$

ו- a היא הנקודה היחידה בקבוצה K שבה מתקבל ערך זה.

כעת נחזור לפונקציה הנתונה בשאלה. זאת הפונקציה $f: (0,\infty)^3 \rightarrow \mathbf{R}$ שמוגדרת על ידי:

$$(x,y,z) \mapsto \frac{1}{p(x,y,z)}$$

ויש להראות שיש לה ערך מזערי בקבוצה $D = \left\{ (x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x \geq y, x^4 + y^4 + z^4 \leq 1 \right\}$

ולמצוא מה הערך הזה. מאחר ש- $D \subseteq K$ אם $x \in D \setminus \{a\}$ אז $x \in K \setminus \{a\}$ ולכן $p(x) < p(a)$

ומכאן ש- $f(a) = \frac{1}{p(a)} > \frac{1}{p(x)} = f(x)$. מאחר ש- $a \in D$, נובע מכך ש- $f(a)$ הוא הערך המזערי של

f בקבוצה D , ש- a היא הנקודה היחידה בה הוא מתקבל, וכן: $f(a) = p(a)^{-1} = \left(2^{-\frac{15}{4}}\right)^{-1} = 2^{\frac{15}{4}}$