

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 חומר הלימוד למטלה: פרקים 1–3
 מספר השאלות: 6
 מועד אחרון להגשה: 25.3.2022
 סמסטר: 2022

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (16 נקודות)

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^k$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות:

א. אם A קמורה אז $A \cup \partial A$ קמורה.
 ב. אם $A \cup \partial A$ קמורה אז A קמורה.
 ג. אם A קמורה אז $A \setminus \partial A$ קמורה.
 ד. אם $A \setminus \partial A$ קמורה אז A קמורה.

שאלה 2 (16 נקודות)

יהי $k \geq 2$ ו- $a \in \mathbb{R}^k$. תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה שרציפה ב- $\mathbb{R}^k$.
 הוכיחו שיש $u \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ כך שהפרוסה $f|_{a,u}$ אינה פונקציה חד-חד-ערכית.

שאלה 3 (20 נקודות)

הוכיחו שהקבוצה $\left\{ (x_1, \dots, x_k) \mid \sum_{i=1}^k x_i^{2i} = 1 \right\}$ היא משטחעל ב- $\mathbb{R}^k$.
 המלצה: במקום להוכיח זאת ישירות מההגדרה, כדאי לנסות להיעזר במשטחיעל מוכרים.

שאלה 4 (16 נקודות)

יהי $k > 1$ מספר איזוגי. תהי φ פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$ שגזירה ב-0.
 תהי f הפונקציה החלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $\mathbb{R}$ שמוגדרת כך: $f: (x_1, \dots, x_k) \mapsto \varphi(\sqrt[k]{x_1 \cdots x_k})$
 חשבו את כל הנגזרות הכיווניות של f ב- $0^{[k]}$ והוכיחו ש- f גזירה ב- $0^{[k]}$ אם ורק אם $\varphi'(0) = 0$.

שאלה 5 (16 נקודות)

תהי $B \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$ ותהי $f: M_{k \times k}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{k \times k}(\mathbb{R})$ שמוגדרת כך: $A \mapsto \sum_{m=1}^{2022} (A^m B^m - B^m A^m)$
 הראו ש- f גזירה ב-0 ומצאו את הפונקציה הלינארית Df_0 . (ראו הגדרה 1.1.3 והערה 1.1.1.)
 אוסף המטריצות $M_{k \times k}(\mathbb{R})$ מזוהה עם המרחב $\mathbb{R}^{k^2}$ וב-0 הכוונה היא למטריצת האפס.

שאלה 6 (16 נקודות)

תהי f פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^2$ ל- $\mathbb{R}$ שגזירה בסביבה של הנקודה $(1,1)$ ובעלת התכונות:

• יש סביבה של $(1,1)$ שלכל (x,y) בה מתקיים: $y^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + 2f(x,y) = 0$

• יש סביבה של 1 שלכל t שנמצא בה מתקיים: $f(t^2, t) = \cos t$

הוכיחו שיש סביבה של $(1,1)$ ופונקציה יסודית ששווה ל- f בסביבה זאת, ומצאו נוסחה ל- f

שנכונה בסביבה זאת. (הדרכה: היעזרו בנגזרות החלקיות של הפונקציה $\varphi: (s,t) \mapsto t^2 f(s + 2t^2, 2t)$).

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: Q מהווה דוגמה נגדית לסעיפים ב וד (כי $\emptyset \neq R$ ו- Q אינה קמורה).

סעיפי א ו-ג נכונים.

בסעיף ג, אם $a, b \in A \setminus \partial A$ אז הן נקודות פנימיות ולכן יש $r > 0$ כך ש- $B(a; r) \subseteq A$ ו- $B(b; r) \subseteq A$. אם $c = ta + (1-t)b$ ו- $0 < t < 1$ נראה ש- $B(c; r) \subseteq A$ ואז $c \in A \setminus \partial A$ ולכן הקטע שקצותיו a ו- b מוכל כולו ב- $A \setminus \partial A$, והקבוצה $A \setminus \partial A$ קמורה. לשם כך יהי $c' \in B(c; r)$ ונסמן $v = c' - c$. אז $|v| < r$. מתקיים:

$$c' = c + v = ta + (1-t)b + tv + (1-t)v = t(a+v) + (1-t)(b+v) = ta' + (1-t)b'$$

ו- $a' = a + v \in B(a; r)$ וכן $b' = b + v \in B(b; r)$ ולכן $a', b' \in A$ וכיוון ש- A קמורה גם

$$B(c; r) \subseteq A \text{, ובכך הוכח ש-} c' = ta' + (1-t)b' \in A$$

בסעיף א, אם נניח בשלילה ש- $A \cup \partial A$ אינה קמורה אז יש $a, b \in A \cup \partial A$ ויש $0 < t < 1$ כך ש- $c = ta + (1-t)b \notin A \cup \partial A$. כל סביבה של c מכילה את c שאינה ב- A , וכך ש- c אינה נקודת שפה של A יש סביבה שאינה מכילה אף נקודה של A . לכן יש $r > 0$ כך ש- $A \cap B(c; r) = \emptyset$. הכדורים $B(a; r)$ ו- $B(b; r)$ מכילים נקודה של A , כלומר יש $a' \in A \cap B(a; r)$ ויש $b' \in A \cap B(b; r)$.

מכך ש- A קמורה נובע ש:

$$c' = ta' + (1-t)b' \in A \quad \text{בנוסף}$$

$$|c' - c| = |(ta' + (1-t)b') - (ta + (1-t)b)| = |t(a' - a) + (1-t)(b' - b)| \leq t|a' - a| + (1-t)|b' - b| < tr + (1-t)r = r$$

ולכן $c' \in A \cap B(c; r) = \emptyset$ וקיבלנו סתירה.

לשאלה 2: נניח בשלילה שהטענה אינה נכונה. אז למשל עבור $v = e_1$ הפרוסה $f|_{a,v}$ חד-חד ערכית.

$$\text{בה"כ נניח ש-} f(a) = f|_{a,v}(0) < f|_{a,v}(1) = f(a+v) \text{ (אחרת נחליף את } f \text{ ב-} -f \text{).}$$

$$\text{אז } f|_{a,v}(-1) = f(a-v) < f(a) = f|_{a,v}(0) < f|_{a,v}(1) = f(a+v) \text{ , אחרת ממשפט ערך הביניים נקבל או } 0 < c \leq 1 \text{ כך ש-}$$

$$f|_{a,v}(c) = f(a+cv) = f(a) = f|_{a,v}(0) \text{ או } -1 < c < 0 \text{ כך ש-} f|_{a,v}(c) = f(a) = f|_{a,v}(0)$$

לחילופין: $f|_{a,v}$ פונקציה חד-חד ערכית ורציפה ב- $\mathbf{R}$ ולפי אינפי 1 היא מונוטונית. כעת

נצדיק איכשהו את העובדה ש- $\mathbf{R}^k \setminus \{a\}$ קשורה מסילתית (למשל בעזרת שאלה 13.ט.2) ונסיק

שיש מסילה $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^k \setminus \{a\}$ כך ש- $\varphi(0) = a - v$ ו- $\varphi(1) = a + v$. אז $\varphi \circ f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ רציפה

ומתקיים $f \circ \varphi(0) < f(a) < f \circ \varphi(1)$ ולכן יש $0 < c < 1$ כך ש- $f(a) = f \circ \varphi(c)$. נסמן

$$u = \varphi(c) - a \text{ . אז } u \neq 0 \text{ ו-} f|_{a,u}(0) = f(a) = f \circ \varphi(c) = f(\varphi(c)) = f(a+u) = f|_{a,u}(1) \text{ ולכן}$$

$f|_{a,u}$ אינה חד-חד ערכית (בסתירה להנחת השלילה).

לשאלה 3: ההוכחה דומה להוכחה שספירה היא משטח'על, אבל עדיף להיעזר בעובדה זאת.

הקבוצה הנתונה קומפקטית, והפונקציה $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ היא פונקציה רציפה וחד-חד-ערכית ממנה על הספירה. לפי טענה 2.2 ד.29 הפונקציה ההפוכה גם היא רציפה, והרכבה שלה על טלאים שמכסים את הספירה נותנת טלאים שמכסים את המשטח שלנו. (אולי יותר פשוט להשתמש בפונקציה האפינית $(x_1, x_2, \dots, x_k) \mapsto (x_1, x_2^2, \dots, x_k^k)$? ככל הנראה לא, בגלל חילופי סימן והתאפסות על הצירים).

לשאלה 4: 2021\2021\292.

$$\partial_u f(0) = \frac{d}{dt} \varphi \left(t \cdot ([u]_1 \cdots [u]_k)^{\frac{1}{k}} \right) = \varphi'(0) \cdot ([u]_1 \cdots [u]_k)^{\frac{1}{k}} \quad \text{חישוב ישיר נותן:}$$

והנגזרות החלקיות הן כולן 0.

$$0 = \nabla f(0) \cdot (1, \dots, 1) = \partial_{(1, \dots, 1)} f(0) = \varphi'(0) \cdot 1 = \varphi'(0) \quad \text{בפרט אם } f \text{ גזירה אז:}$$

$$\mu(t) = \begin{cases} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases} \quad \text{בכיוון ההפוך: אם } \varphi'(0) = 0 \text{ אז}$$

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{|x|} \right| = \left| \frac{\varphi \left(([x]_1 \cdots [x]_k)^{\frac{1}{k}} \right) - \varphi(0)}{|x|} \right| \quad \text{רציפה ב-0 ולכן:}$$

$$\begin{aligned} &= \left| \mu \left(([x]_1 \cdots [x]_k)^{\frac{1}{k}} \right) \right| \cdot \left| \frac{([x]_1 \cdots [x]_k)^{\frac{1}{k}}}{|x|} \right| \\ &\leq \left| \mu \left(([x]_1 \cdots [x]_k)^{\frac{1}{k}} \right) \right| \xrightarrow{x \rightarrow 0^{[k]}} |\mu(0)| = 0 \end{aligned}$$

לשאלה 5: 2021\2021\93 (= 2021\2021\53).

הפונקציה $Df_0 : A \mapsto AB - BA$ היא לינארית ומתקיים

$$\begin{aligned} \frac{f(h) - f(0) - Df_0(h)}{|h|} &= \frac{1}{|h|} \sum_{m=2}^{2021} (h^m B^m - B^m h^m) \\ &= \sum_{m=2}^{2021} |h|^{m-1} \left(\left(\frac{1}{|h|} h \right)^m B^m - B^m \left(\frac{1}{|h|} h \right)^m \right) \end{aligned}$$

כל מחובר באגף ימין הוא מכפלת פונקציה אפסה בפונקציה חסומה (למשל על פי משפט ווירשטראס בספירת היחידה של $M_{k \times k}(\mathbf{R})$, אבל כיוון שהמשפט מוכח רק בפרק 6 צריך כאן לחסום במפורש או להשתמש בטענה 2.2 ד.29 שהיא בעצם הכללה של משפט ווירשטראס).

לשאלה 6: על פי שאלה מ-2019\2019\12\4.

בעזרת כלל השרשרת מקבלים $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) = 0$. אז בסביבה קמורה של $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ "הפונקציה

φ תלויה ב- s בלבד". אז נוכל לרשום $f(s+2t^2, 2t) = t^{-2}\psi(s)$ עבור (s, t) בסביבה

הזאת. עבור (x, y) בסביבה מספיק קטנה של $(1, 1)$ נקבל (מרציפות) ש-

$$(s, t) = \left(x - \frac{1}{2}y^2, \frac{1}{2}y\right) \text{ באותה סביבה של } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ ו- } (x, y) = (s + 2t^2, 2t) \text{ ולכן}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4}y^{-2}\psi\left(x - \frac{1}{2}y^2\right) \text{ בפרט עבור } t \text{ בסביבה מספיק קטנה של } 1 \text{ נקבל ש-}$$

$$\cos t = f(t^2, t) = \frac{1}{4}t^{-2}\psi\left(t^2 - \frac{1}{2}t^2\right) = \frac{1}{4}t^{-2}\psi\left(\frac{1}{2}t^2\right) \text{ בסביבה מספיק קטנה}$$

$$\text{של } \frac{1}{2} \text{ יהיה } t \text{ בסביבה הקודמת של } 1 \text{ כך ש- } z = \frac{1}{2}t^2 \text{ כלומר } t = \sqrt{2z} \text{ ואז}$$

$$\cos\sqrt{2z} = \frac{1}{8z}\psi(z) \text{ ולכן } \psi(z) = 8z\cos\sqrt{2z} \text{ בסיבה מספיק קטנה של } (1, 1) \text{ יתקיים}$$

$$\text{גם ש- } x - \frac{1}{2}y^2 \text{ באותה סביבה ממנה נלקח } z \text{ ושם יתקיים:}$$

$$f(x, y) = (2xy^{-2} - 1)\cos\sqrt{2x - y^2}$$