

מתווה לפתרון ממ"ן 11

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 סמסטר: 2022
 חומר הלימוד למטלה: פרקים 1–3
 משקל המטלה: 5 נקודות

לרוב השאלות כמה וכמה דרכי פתרון.
 מובאת כאן בדרך כלל דרך אחת, שאינה בהכרח הדרך הטובה ביותר.

שאלה 1 (16 נקודות)

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^k$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות:

- א. אם A קמורה אז $A \cup \partial A$ קמורה.
 ב. אם $A \cup \partial A$ קמורה אז A קמורה.
 ג. אם A קמורה אז $A \setminus \partial A$ קמורה.
 ד. אם $A \setminus \partial A$ קמורה אז A קמורה.

פתרון סעיף א

הטענה נכונה. יהיו $a, b \in A \cup \partial A$ ויהי $0 < t < 1$. נסמן:

$$c = ta + (1-t)b$$

כדי להוכיח ש- $c \in A \cup \partial A$ נניח ש- $c \notin A$ ונוכיח שאז $c \in \partial A$.

יהי $r > 0$. מכך ש- $a, b \in A \cup \partial A$ נובע שכל אחד מבין הכדורים $B(a; r)$ ו- $B(b; r)$ מכיל נקודה של

A , כלומר יש $a' \in A \cap B(a; r)$ ויש $b' \in A \cap B(b; r)$. נסמן:

$$c' = ta' + (1-t)b'$$

מכך ש- A קמורה ו- $a', b' \in A$ נובע ש- $c' \in A$. כמוכן

$$|c' - c| = |ta' + (1-t)b' - (ta + (1-t)b)|$$

$$= |t(a' - a) + (1-t)(b' - b)| \leq t|a' - a| + (1-t)|b' - b| < tr + (1-t)r = r$$

כלומר $c' \in B(c; r)$ ולכן $A \cap B(c; r) \neq \emptyset$.

גם $c \in B(c; r) \setminus A$ ולכן $B(c; r) \setminus A \neq \emptyset$ ומכאן $c \in \partial A$.

פתרון סעיף ג

אם $a, b \in A \setminus \partial A$ אז הן נקודות פנימיות של A ולכן יש $r > 0$ כך ש- $B(a; r) \subseteq A$ ו- $B(b; r) \subseteq A$.

אם $c = ta + (1-t)b$ ו- $0 < t < 1$ נראה ש- $B(c; r) \subseteq A$ ואז $c \in A \setminus \partial A$ ולכן הקטע שקצותיו a ו- b

מוכל כולו ב- $A \setminus \partial A$, והקבוצה $A \setminus \partial A$ קמורה. לשם כך יהי $c' \in B(c; r)$ ונסמן $v = c' - c$. אז

$$|v| < r \text{ מתקיים:}$$

$$c' = c + v = ta + (1-t)b + tv + (1-t)v = t(a+v) + (1-t)(b+v) = ta' + (1-t)b'$$

וכן $a' = a + v \in B(a; r)$ וכן $b' = b + v \in B(b; r)$ ולכן $a', b' \in A$ וכיוון ש- A קמורה גם

$c' = ta' + (1-t)b' \in A$, ובכך הוכח ש- $B(c; r) \subseteq A$, והסתיימה ההוכחה.

דוגמאות נגדיות לסעיפים ב וד

סעיפים ב וד אינם נכונים, ויש דוגמאות נגדיות רבות ושונות לכל אחד מהם.

דרך אחת מאוד גיאומטרית לקבל דוגמה נגדית היא לקחת מצולע קמור כלשהו (למשל משולש) במישור, וליצור קבוצה A שכוללת את כל נקודות המצולע, כולל הנקודות "בפנים" וקודקודי המצולע, אבל ללא שאר הנקודות שעל צלעות המצולע (למעשה די להסיר נקודה אחת מאחת הצלעות, שאינה קודקוד של המצולע). אז בבירור A אינה קמורה, כי לכל צלע של המצולע היא מכילה את שני קצותיה אבל לא את שאר הנקודות. הקבוצה $A \cup \partial A$ היא קבוצת כל נקודות המצולע, כולל כל הנקודות על צלעות המצולע, וזאת קבוצה קמורה, ואילו הקבוצה $A \setminus \partial A$ היא קבוצת נקודות המצולע הפנימיות, ללא הקודקודים והצלעות, וגם היא קבוצה קמורה. דוגמה אחרת לגמרי: נקח $k=1$ ו- $A = \mathbb{Q}$ (קבוצת המספרים הרציונליים). בכל כדור חד-ממדי – כלומר בכל קטע – יש מספרים רציונליים ומספרים אירציונליים, ולכן כל מספר ממשי הוא נקודת שפה של $\mathbb{Q}$ כלומר $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$. אז $\mathbb{Q} \cup \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ ו- $\mathbb{Q} \setminus \partial \mathbb{Q} = \emptyset$ הם קבוצות קמורות, אבל $\mathbb{Q}$ בבירור אינה קבוצה קמורה (כי בכל קטע יש מספר אירציונלי).

שאלה 2 (16 נקודות)

יהי $k \geq 2$ ו- $a \in \mathbb{R}^k$. תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה שרציפה ב- $\mathbb{R}^k$.

הוכיחו שיש $u \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ כך שהפרוסה $f|_{a,u}$ אינה פונקציה חד-חד-ערכית.

פתרון

יש דרכים רבות לנסח הוכחה לנדרש. הוכחה אחת:

נניח בשלילה שהטענה אינה נכונה, כלומר כל הפרוסות $f|_{a,u}$ חד-חד-ערכיות.

אז למשל עבור $v = e_1$ הפרוסה $f|_{a,v}$ חד-חד-ערכית.

בה"כ נניח ש- $f(a) = f|_{a,v}(0) < f|_{a,v}(1) = f(a+v)$ (אחרת נחליף את f ב- $-f$).

אז $f|_{a,v}(-1) < 0 = f|_{a,v}(0) < f|_{a,v}(1)$, אחרת, אם $f|_{a,v}(1) < f|_{a,v}(-1)$ אז ממשפט ערך הביניים נקבל

$0 < c < 1$ כך ש- $f|_{a,v}(c) = f|_{a,v}(-1)$. אחרת $f|_{a,v}(1) < f|_{a,v}(-1)$ וממשפט ערך הביניים יש

$-1 < c < 0$ כך ש- $f|_{a,v}(c) = f|_{a,v}(1)$. בשני המקרים יש סתירה לחד-חד-ערכיות של $f|_{a,v}$.

כעת נצדיק איכשהו את העובדה ש- $\mathbb{R}^k \setminus \{a\}$ קשורה-מסילתית (למשל בעזרת שאלה 13.ט.2).

ונסיק שיש מסילה $\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{a\}$ כך ש- $\varphi(0) = a - v$ ו- $\varphi(1) = a + v$. אז $f \circ \varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

רציפה ומתקיים $f \circ \varphi(0) = f(a - v) < f(a) < f(a + v) = f \circ \varphi(1)$

ולכן יש $0 < c < 1$ כך ש- $f \circ \varphi(c) = f(a)$. $f \circ \varphi(c) = f(a)$ ולכן $\varphi(c) \in \mathbb{R}^k \setminus \{a\}$ ולכן $\varphi(c) - a \neq 0$

מתקיים $f|_{a,u}(0) = f(a) = f \circ \varphi(c) = f(\varphi(c)) = f(a + u) = f|_{a,u}(1)$

ולכן $f|_{a,u}$ אינה חד-חד-ערכית (בסתירה להנחת השלילה).

שאלה 3 (20 נקודות)

הוכיחו שהקבוצה $\left\{ (x_1, \dots, x_k) \mid \sum_{i=1}^k x_i^{2i} = 1 \right\}$ היא משטח על $\mathbf{R}^k$.

המלצה: במקום להוכיח זאת ישירות מההגדרה, כדאי לנסות להיעזר במשטחיעל מוכרים.

פתרון

אפשר להוכיח את הטענה בדומה לדוגמה 14.2, שבה מוכח שספירת היחידה היא משטח על. במקום זה ננצל את העובדה שידוע כבר שהספירה היא משטח על. נסמן את הקבוצה הנתונה ב- K

ונסמן $S = S^{k-1}(0^{[k]}; 1)$. הפונקציה $\rho: \mathbf{R}^k \setminus \{0\} \rightarrow S$ שמוגדרת על ידי $x \mapsto \frac{1}{|x|}x$ היא פונקציה יסודית ולכן רציפה. היא כמוכן על (למשל כי הצמצום שלה ל- S זאת פונקציית הזהות של S). אם

נראה שהצמצום $\rho|_K$ היא פונקציה הפיכה מ- K ל- S אז מחלק ב של הטענה המופלאה 29.2.2 ינבע ש- $\rho|_K$ היא הומאומורפיזם מ- K ל- S . כדי להראות שהצמצום $\rho|_K$ הוא פונקציה הפיכה,

די להראות שלכל $u \in S$ מתקיים $|K \cap \{x \mid \rho(x) = u\}| = 1$.

תוכלו לבדוק בקלות ש- $\{x \mid \rho(x) = u\} = \{tu \mid t > 0\}$, כלומר יש להראות שבקרב $\{tu \mid t > 0\}$ יש בדיוק איבר אחד של K . נסמן $u = (u_1, \dots, u_k)$

אז $tu \in K$ אם ורק אם $\sum_{i=1}^k (tu_i)^{2i} = 1$. זה שקול ל- $t^2 \sum_{i=1}^k u_i^{2i} = 1$.

כיוון ש- $u \neq 0$ מתקיים $\sum_{i=1}^k u_i^{2i} > 0$ ואם $t > 0$ השוויון הקודם שקול ל- $t = \left(\sum_{i=1}^k u_i^{2i} \right)^{-\frac{1}{2}}$.

זה מראה שיש $t > 0$ יחיד כך ש- $tu \in K$, כלומר בקרב $\{tu \mid t > 0\}$ יש בדיוק איבר אחד של K .

(למעשה זה מראה ש- $u \mapsto \left(\sum_{i=1}^k u_i^{2i} \right)^{-\frac{1}{2}}$ הוא הפיכה מ- S ל- K), וגם כך רואים ש- $\rho|_K$ היא הומאומורפיזם.

אלא מה: אין שום דבר שמבטיח לנו שתתקבוצה של $\mathbf{R}^k$ שהומאומורפית למשטח על ב- $\mathbf{R}^k$ היא עצמה משטח על ב- $\mathbf{R}^k$. נצטרך לעבוד עוד קצת.

לפי הוכחה בדוגמה הקבוצה $S \setminus \{e_k\}$ היא טלאי $k-1$ ממדי ב- $\mathbf{R}^k$. אפשר להוכיח שאם $u \in S$

אז יש העתקת חפיפה שמעבירה את 0 ל- 0 ואת e_k ל- u (למשל להראות שיש מטריצה

אורתוגונלית P שהשורה האחרונה שלה היא u , ואז ההעתקה המוגדרת בחלק א של שאלה

13.1.1 היא העתקת חפיפה כזאת). אז לפי מסקנה 13.2.2 גם $S \setminus \{u\}$ היא טלאי $k-1$ ממדי ב- $\mathbf{R}^k$.

$\rho|_K$ הוא הומאומורפיזם מ- K ל- S ולכן $\rho|_{K \setminus \{v\}}$ הוא הומאומורפיזם מ- $K \setminus \{v\}$ ל- $S \setminus \{\rho(v)\}$.

$S \setminus \{\rho(v)\}$ היא טלאי, כלומר היא הומאומורפית לקבוצה פתוחה ב- $\mathbf{R}^{k-1}$.

הרכבת הומואומורפיזמים היא הומואומורפיזם, ולכן גם $K \setminus \{v\}$ הומואומורפית לקבוצה פתוחה ב- $\mathbf{R}^{k-1}$, ולכן היא טלאי $k-1$ ממדי. כעת לכל $v \neq 0$ נתבונן בקבוצה הפתוחה $U_v = \mathbf{R}^k \setminus \{tv \mid t \geq 0\}$. ברור ממה שהוכחנו על חיתוך K עם קרניים שקודקודן בראשית שאם $v \in K$ אז $U_v \cap K = K \setminus \{v\}$. כעת אם ניקח שתי נקודות שונות $v, v' \in K$ אז $U_v \cup U_{v'} = \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$ ולכן $K \subseteq U_v \cup U_{v'}$, וכן $K \cap U_v = K \setminus \{v\}$ ו- $K \cap U_{v'} = K \setminus \{v'\}$ הן טלאים $k-1$ ממדיים, ולכן K היא יריעה $k-1$ ממדית, כלומר משטח על ב- $\mathbf{R}^k$.

שאלה 4 (16 נקודות)

יהי $k > 1$ מספר איזוגי. תהי פונקציה חלקית מ- $\mathbf{R}$ ל- $\mathbf{R}$ שגזירה ב-0. תהי f הפונקציה החלקית מ- $\mathbf{R}^k$ ל- $\mathbf{R}$ שמוגדרת כך: $f: (x_1, \dots, x_k) \mapsto \varphi(\sqrt[k]{x_1 \cdots x_k})$. חשבו את כל הנגזרות הכיווניות של f ב- $0^{[k]}$ והוכיחו ש- f גזירה ב- $0^{[k]}$ אם ורק אם $\varphi'(0) = 0$.

פתרון

מתקיים: $f|_{0,u} = f(tu) = \varphi(\sqrt[k]{[tu]_1 \cdots [tu]_k}) = \varphi(\sqrt[k]{t^k [u]_1 \cdots [u]_k}) = \varphi(t \sqrt[k]{[u]_1 \cdots [u]_k})$

ולכן: $\partial_u f(0) = \frac{d}{dt} \varphi(t \sqrt[k]{[u]_1 \cdots [u]_k}) = \varphi'(0) \cdot \sqrt[k]{[u]_1 \cdots [u]_k}$

אז לכל i : $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = \partial_{e_i} f(0) = \varphi'(0) \cdot \sqrt[k]{0} = 0$

בפרט אם f גזירה אז לפי משפט 6.3 ג. מתקיים $\nabla f(0) = 0$ ולכן:

$$0 = \nabla f(0) \cdot (1, \dots, 1) = \partial_{(1, \dots, 1)} f(0) = \varphi'(0) \cdot \sqrt[k]{1} = \varphi'(0) \cdot 1 = \varphi'(0)$$

בכיוון ההפוך, נניח ש- $\varphi'(0) = 0$ ונוכיח ש- f גזירה ב-0. נסמן: $\mu(t) = \begin{cases} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$

מכך ש- $\varphi'(0) = 0$ נובע ש- μ רציפה ב-0. אז

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(0) - 0 \cdot x}{|x|} \right| &= \left| \frac{\varphi(\sqrt[k]{[x]_1 \cdots [x]_k}) - \varphi(0)}{|x|} \right| \\ &= \left| \mu(\sqrt[k]{[x]_1 \cdots [x]_k}) \right| \cdot \left| \frac{\sqrt[k]{[x]_1 \cdots [x]_k}}{|x|} \right| \leq \left| \mu(\sqrt[k]{[x]_1 \cdots [x]_k}) \right| \xrightarrow{x \rightarrow 0^{[k]}} |\mu(0)| = 0 \end{aligned}$$

ולפי כלל הכריך והגדרה 2.3 א. גזירה ו- $\nabla f(0) = 0$.

שאלה 5 (16 נקודות)

תהי $B \in M_{k \times k}(\mathbf{R})$ ותהי $f: M_{k \times k}(\mathbf{R}) \rightarrow M_{k \times k}(\mathbf{R})$ שמוגדרת כך: $A \mapsto \sum_{m=1}^{2022} (A^m B^m - B^m A^m)$

הראו ש- f גזירה ביס ומצאו את הפונקציה הלינארית Df_0 . (ראו הגדרה 1.1.3 והערה 1.1.3.1.)

אוסף המטריצות $M_{k \times k}(\mathbf{R})$ מזוהה עם המרחב $\mathbf{R}^{k^2}$ וביס הכוונה היא למטריצת האפס.)

פתרון

לפי חלקים א ו-ב של דוגמה 6.1.1 פונקציות החיבור והכפל של מטריצות הן פונקציות פולינומיות, ולכן הפונקציה f היא פונקציה פולינומית, ולכן היא גזירה בכל המרחב, ובעקרון ניתן לחשב את כל הנגזרות החלקיות של כל רכיביה בכל נקודה, ובפרט ביס, מכך לקבל בעזרת מסקנה 12.1.3 את המטריצה Jf_0 וממנה לפי הגדרה 5.1.3 את הפונקציה הלינארית Df_0 . אבל אנו איננו רוצים לעבוד קשה יותר ממה שהכרחי, ומסתבר שהרבה יותר פשוט למצוא את הדרוש ישירות מהגדרת הגזירות של פונקציה (הגדרה 1.1.3).

ראשית: $f(0) = \sum_{m=1}^{2022} (0^m B^m - B^m 0^m) = \sum_{m=1}^{2022} 0 = 0$

שנית נגדיר פונקציה $Df_0: M_{k \times k}(\mathbf{R}) \rightarrow M_{k \times k}(\mathbf{R})$ על ידי $A \mapsto AB - BA$

ונראה שמתקיימות כל הדרישות שבהגדרה 1.1.3. הפונקציה Df_0 לינארית כי:

$$\begin{aligned} Df_0(\alpha X + \beta Y) &= (\alpha X + \beta Y)B - B(\alpha X + \beta Y) \\ &= \alpha XB + \beta YB - \alpha BX - \beta BY \\ &= \alpha(XB - BX) + \beta(YB - BY) = \alpha Df_0(X) + \beta Df_0(Y) \end{aligned}$$

$$\frac{f(h) - f(0) - Df_0(h)}{|h|} = \frac{\sum_{m=2}^{2021} (h^m B^m - B^m h^m) - 0 - (hB - Bh)}{|h|} = \frac{1}{|h|} \sum_{m=2}^{2021} (h^m B^m - B^m h^m) \quad \text{כעת:}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(h) - f(0) - Df_0(h)}{|h|} \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \sum_{m=2}^{2021} (h^m B^m - B^m h^m) \right| \leq \frac{1}{|h|} \sum_{m=2}^{2021} |h^m B^m - B^m h^m| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \sum_{m=2}^{2021} (|h^m B^m| + |B^m h^m|) \leq \frac{1}{|h|} \sum_{m=2}^{2021} (|h|^m |B|^m + |B|^m |h|^m) \\ &= 2 \sum_{m=2}^{2021} |B|^m |h|^{m-1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 = 2 \sum_{m=2}^{2021} |B|^m |0|^{m-1} = 0 \end{aligned} \quad \text{לכן:}$$

יש להצדיק את האישוויון שמסומן ב-*. נעשה זאת בהמשך. ראשית נסיק בעזרת כלל הכריך

$$\frac{f(h) - f(0) - Df_0(h)}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{ולכן} \quad \left| \frac{f(h) - f(0) - Df_0(h)}{|h|} \right| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{שמתקיים}$$

ולכן f גזירה ביס והפונקציה שסומנה קודם ב- Df_0 היא הפונקציה הלינארית Df_0 מהגדרה 1.1.3.

הדבר היחיד שנותר הוא להצדיק את האישוויון שמסומן ב-*:

נראה שאם $A \in M_{k \times l}(\mathbf{R})$ ו- $B \in M_{l \times n}(\mathbf{R})$ מתקיים $|AB| \leq |A| \cdot |B|$. מכך נובע בעזרת אינדוקציה שלכל מכפלת מטריצת שמוגדרת מתקיים $|A_1 \cdots A_m| \leq |A_1| \cdots |A_m|$, ובפרט אם $B, h \in M_{k \times k}(\mathbf{R})$ ו- m מספר שלם חיובי אז $|h^m B^m| \leq |h|^m |B|^m$ ו- $|B^m h^m| \leq |B|^m |h|^m$, והאישוויון * נכון.

היו $A \in M_{k \times l}(\mathbf{R})$ ו- $B \in M_{l \times n}(\mathbf{R})$. כזכור $[A]_{ij}$ הוא סימון לרכיב של המטריצה A שנמצא

$$[AB]_{ij} = \sum_{s=1}^l [A]_{is} [B]_{sj} \quad \text{בשורה ה- } i \text{ ובעמודה ה- } j \text{ שלה. לפי הגדרת כפל מטריצות מתקיים:}$$

לפי הגדרת האורך של וקטור (הגדרה 1.ד.1) יחד עם חלק ג של הערה 1.א.1, מתקיים

$$|A|^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^l [A]_{is}^2$$

$$|B|^2 = \sum_{s=1}^l \sum_{j=1}^n [B]_{sj}^2$$

וגם:

$$| [AB]_{ij} | = \left| \sum_{s=1}^l [A]_{is} [B]_{sj} \right| = \left| ([A]_{i1}, \dots, [A]_{il}) \cdot ([B]_{1j}, \dots, [B]_{lj}) \right|$$

$$\leq \left| ([A]_{i1}, \dots, [A]_{il}) \right| \cdot \left| ([B]_{1j}, \dots, [B]_{lj}) \right| = \sqrt{\sum_{s=1}^l [A]_{is}^2} \cdot \sqrt{\sum_{s=1}^l [B]_{sj}^2}$$

מאישוויון קושי שורץ

$$[AB]_{ij}^2 \leq \left(\sum_{s=1}^l [A]_{is}^2 \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^l [B]_{tj}^2 \right) \quad \text{ולכן:}$$

$$|AB|^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n [AB]_{ij}^2 \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \left(\left(\sum_{s=1}^l [A]_{is}^2 \right) \cdot \left(\sum_{s=1}^l [B]_{sj}^2 \right) \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^l [A]_{is}^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^l [B]_{sj}^2 \right) = |A|^2 |B|^2$$

אז

$$|AB| \leq |A| \cdot |B| \quad \text{ולכן } |AB|^2 \leq |A|^2 |B|^2 \quad \text{כלומר}$$

שאלה 6 (16 נקודות)

תהי f פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^2$ ל- $\mathbb{R}$ שגזירה בסביבה של הנקודה $(1,1)$ ובעלת התכונות:

- יש סביבה של $(1,1)$ שלכל (x,y) בה מתקיים: $y^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + 2f(x,y) = 0$
- יש סביבה של 1 שלכל t שנמצא בה מתקיים: $f(t^2, t) = \cos t$

הוכיחו שיש סביבה של $(1,1)$ ופונקציה יסודית ששווה ל- f בסביבה זאת, ומצאו נוסחה ל- f

שנכונה בסביבה זאת. (הדרכה: היעזרו בנגזרות החלקיות של הפונקציה $\varphi: (s,t) \mapsto t^2 f(s+2t^2, 2t)$).

פתרון

תהי $\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ שמוגדרת על ידי $(s,t) \mapsto (s+2t^2, 2t)$. זאת פונקציה פולינומית ולכן רציפה

$$J\sigma_{(s,t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial[\sigma]_1}{\partial s} & \frac{\partial[\sigma]_1}{\partial t} \\ \frac{\partial[\sigma]_2}{\partial s} & \frac{\partial[\sigma]_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{וגזירה ולפי מסקנה 12.1.3 מתקיים:}$$

שימו לב: סימנו כאן את "המשתנה הראשון" של σ ב- s , ואת "המשתנה השני" ב- t . בדומה

הנגזרת החלקית שלפי המשתנה הראשון מסומנת ב- $\frac{\partial}{\partial s}$ ואילו הנגזרת החלקית שלפי המשתנה

השני מסומנת ב- $\frac{\partial}{\partial t}$ (במקום הסימונים $\frac{\partial}{\partial x}$ ו- $\frac{\partial}{\partial y}$ או $\frac{\partial}{\partial x_1}$ ו- $\frac{\partial}{\partial x_2}$, בהתאמה).

נשים לב ש- $\sigma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (1,1)$ ונסמן $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. תהי U סביבה פתוחה של $(1,1)$ שבה f גזירה

$$\text{ומתקיים השוויון: } y^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + 2f(x,y) = 0$$

אז $V = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma(s,t) \in U\}$ היא סביבה פתוחה של a ולכן לכל $(s,t) \in V$ מתקיים

$$[\sigma]_2(s,t)^2 \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(s,t)) + [\sigma]_2(s,t) \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(s,t)) + 2f(\sigma(s,t)) = 0$$

$$4t^2(s,t)^2 \frac{\partial f}{\partial x}(s+2t^2, 2t) + 2t \frac{\partial f}{\partial y}(s+2t^2, 2t) + 2f(s+2t^2, 2t) = 0 \quad \text{דהיינו:}$$

לפי כלל השרשרת (מסקנה 2.1.3) לכל $(s,t) \in V$ מתקיים $\sigma(s,t) \in U$ ולכן f גזירה בנקודה

$$J(f \circ \sigma)_{(s,t)} = Jf_{\sigma(s,t)} J\sigma_{(s,t)} = \nabla f(\sigma(s,t)) J\sigma_{(s,t)} \quad \text{ומתקיים:}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(s,t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(s,t)) \right) J\sigma_{(s,t)} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s+2t^2, 2t), \frac{\partial f}{\partial y}(s+2t^2, 2t) \right) \begin{pmatrix} 1 & 4t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s+2t^2, 2t), 4t \frac{\partial f}{\partial x}(s+2t^2, 2t) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(s+2t^2, 2t) \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(f \circ \sigma)}{\partial t}(s,t) = 4t \frac{\partial f}{\partial x}(s+2t^2, 2t) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(s+2t^2, 2t) \quad \text{בפרט:}$$

$$\varphi: (s,t) \mapsto t^2 f \circ \sigma(s,t) = t^2 f(s+2t^2, 2t) \quad \text{עכשיו נתבונן בפונקציה המוגדרת על ידי:}$$

זאת מכפלה של פונקציות שגזירות בקבוצה הפתוחה V ולכן היא גזירה שם, ולפי כלל המכפלה

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) = t^2 \frac{\partial (f \circ \sigma)}{\partial t}(s, t) + 2t \cdot (f \circ \sigma)(s, t) \quad \text{של הנגזרת מאינפי 1 מתקיים:}$$

יחד עם מה שכבר מצאנו קודם נקבל עבור כל $(s, t) \in V$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) &= t^2 \left(4t \frac{\partial f}{\partial x}(s + 2t^2, 2t) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(s + 2t^2, 2t) \right) + 2t \cdot f(s + 2t^2, 2t) \\ &= t \left(4t^2 \frac{\partial f}{\partial x}(s + 2t^2, 2t) + 2t \frac{\partial f}{\partial y}(s + 2t^2, 2t) + 2f(s + 2t^2, 2t) \right) = t \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

כזכור (הערה 4.ג.3) הנגזרת החלקית $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t)$ היא למעשה נגזרת של הפונקציה $t \mapsto \varphi(s, t)$,

שעבור כל ערך קבוע של s היא פרוסה של φ . מאחר שהנגזרת הזאת היא 0, נרצה מאוד לטעון

על פי מה שלמדנו באינפי 1 שכל אחת מהפרוסות האלה היא פונקציה קבועה. אך עלינו להיזהר:

המשפט מאינפי 1 עוסק בפונקציה שנגזרתה היא 0 בקטע. מה שיש לנו כאן זאת פונקציה

שנגזרתה היא 0 עבור כל t כזה ש- $(s, t) \in V$ (כלומר $(\sigma(s, t) \in U$), ואיננו יודעים כלל וכלל

שקבוצת הערכים האלה של t הם קטע. אין כל סיבה להניח שזה כך.

מה שאנו יודעים זה ש- V היא סביבה של a . לכן V מכילה עיגול שמרכזו a . עיגול זה מכיל מלבן

פתוח סביב a . יש אפוא קטעים פתוחים I ו- J כאלה ש- $I \times J \subseteq V$ ו- $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

אם $s \in I$ אז לכל $t \in J$ מתקיים $(s, t) \in V$ ולכן $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) = 0$. אז הפונקציה $t \mapsto \varphi(s, t)$ היא

פונקציה שנגזרתה 0 בקטע הפתוח J , ולכן היא פונקציה קבועה. כמובן לערכים שונים של $s \in I$

הפונקציות $t \mapsto \varphi(s, t)$ יכולות להיות פונקציות קבועות שונות. לכל $s \in I$ יש איזשהו קבוע ממשי

שנסמן ב- $c(s)$ כך ש- $\varphi(s, t) = c(s)$ עבור $t \in J$.

אם כך יש לנו פונקציה $c: I \rightarrow \mathbf{R}$ כך שלכל $(s, t) \in I \times J$ מתקיים $\varphi(s, t) = c(s)$. מהגדרת

הפונקציה φ נקבל:

$$t^2 f(s + 2t^2, 2t) = c(s)$$

ללא הגבלת הכלליות אפשר להניח ש- $0 \notin J$ ולכן:

$$f(s + 2t^2, 2t) = t^{-2} c(s)$$

עכשיו נרצה לנצל את הנתון השני, שלכל t באיזושהי סביבה של 1 מתקיים $f(t^2, t) = \cos t$.

(זהירות: זה לא אותו t שבשורה הקודמת, שהיה לקוח מ- J שהיא סביבה של $\frac{1}{2}$ ולא של 1.)

לשם כך נסמן למשל $z = 2t$. נרצה שיהיה $z^2 = s + 2t^2$ ולכן נסמן $z^2 = s + 2t^2 = z^2 - \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}z^2$.

הפונקציה $\gamma: z \mapsto (\frac{1}{2}z^2, \frac{1}{2}z)$ רציפה, ו- $\gamma(1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. המלבן $I \times J$ הוא סביבה של $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ולכן

יש סביבה של 1 כך שלכל z בסביבה זאת מתקיים $(\frac{1}{2}z^2, \frac{1}{2}z) = \gamma(z) \in I \times J$.

נציב זאת בשוויון $f(s + 2t^2, 2t) = t^{-2} c(s)$ ונקבל:

$$f\left(\frac{1}{2}z^2 + 2\left(\frac{1}{2}z\right)^2, 2 \cdot \frac{1}{2}z\right) = \left(\frac{1}{2}z\right)^{-2} c\left(\frac{1}{2}z^2\right)$$

$$f\left(z^2, z\right) = \frac{4}{z^2} c\left(\frac{1}{2}z^2\right)$$

זה נכון עבור z באיזושהי סביבה של 1, ולפי הנתון ל- z באיזושהי סביבה של 1 מתקיים גם
השוויון $f(z^2, z) = \cos z$, ולכן יש סביבה של 1 שלכל z בה מתקיים
 $\cos z = \frac{4}{z^2} c\left(\frac{1}{2}z^2\right)$
 $c\left(\frac{1}{2}z^2\right) = \frac{1}{4}z^2 \cos z$ ולכן:

מציפות הפונקציה $s \mapsto \sqrt{2s}$ בסביבה של $\frac{1}{2}$ נקבל שיש סביבה של $\frac{1}{2}$ שלכל s בה מתקיים:
 $c\left(\frac{1}{2}\sqrt{2s}^2\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2s}^2 \cos \sqrt{2s}$
 $c(s) = \frac{1}{2}s \cos \sqrt{2s}$

גם הקטע I היה סביבה של $\frac{1}{2}$. כדי להימנע מים של סימונים נניח בה"כ שהקטע הזה מוכל
בסביבה שבה מתקיים השוויון האחרון (דהיינו נקצר אותו לפי הצורך) ונסיק שלכל $(s, t) \in I \times J$
מתקיים השוויון:
 $f\left(s + 2t^2, 2t\right) = t^{-2} \cdot \frac{1}{2}s \cos \sqrt{2s} = \frac{s \cos \sqrt{2s}}{2t^2}$

עכשיו אנחנו כבר קרובים מאוד ליעד שלנו: נוסחה לפונקציה f , שתקפה בסביבה של $(1, 1)$.
למעשה מה שקיבלנו הוא
 $f \circ \sigma(s, t) = \frac{s \cos \sqrt{2s}}{2t^2}$

אם נציב $(s, t) = \sigma^{-1}(x, y)$ נקבל $f(x, y) = f\left(\sigma\left(\sigma^{-1}(x, y)\right)\right)$. השוויון $(s, t) = \sigma^{-1}(x, y)$ שקול
לשוויון $\sigma(s, t) = (x, y)$ כלומר $(s + 2t^2, 2t) = (x, y)$. לזה דרוש $2t = y$ כלומר $t = \frac{1}{2}y$ ודרוש גם
 $s + 2t^2 = x$ כלומר $s = x - 2t^2 = x - \frac{1}{2}y^2$.

הפונקציה $\tau: (x, y) \mapsto \left(x - \frac{1}{2}y^2, \frac{1}{2}y\right)$ רציפה, ו- $\tau(1, 1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, ולכן יש סביבה N של $(1, 1)$ כך
שלכל $(x, y) \in N$ מתקיים ש- $\tau(x, y)$ נמצא בסביבה שבה מתקיים השוויון שמצאנו קודם, כלומר

לכל $(x, y) \in N$ מתקיים:
 $f\left(\left(x - \frac{1}{2}y^2\right) + 2\left(\frac{1}{2}y\right)^2, 2 \cdot \frac{1}{2}y\right) = \frac{\left(x - \frac{1}{2}y^2\right) \cos \sqrt{2\left(x - \frac{1}{2}y^2\right)}}{2\left(\frac{1}{2}y\right)^2}$
 $f(x, y) = \frac{(2x - y^2) \cos \sqrt{2x - y^2}}{y^2} = (2xy^{-2} - 1) \cos \sqrt{2x - y^2}$