

ה א ו נ י ב ר ס י ט ה ה פ ת ו ח ה

20224

חשבון אינפיניטסימלי 3

חוברת הקורס - אביב 2021ב

כתב: ד"ר עופר הדס

פברואר 2021 - סמסטר אביב - תשפ"א

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

א	אל הסטודנטים
ב	לוח זמנים ופעילויות
ג	התנאים לקבלת נקודות זכות
1	ממ"ח 01
2	ממ"ן 11
4	ממ"ח 02
5	ממ"ן 12
7	ממ"ן 13
9	ממ"ן 14
10	ממ"ן 15

אל הסטודנטים,

אנו שמחים לקדם את פניכם עם הצטרפותכם אל לומדי הקורס חשבון אינפיניטסימלי 3.

חוברת זאת כוללת פרטים שעליכם לדעת, כדי שתוכלו לבצע את המוטל עליכם בלימוד קורס זה. פרטים חשובים נוספים כלולים בחוברת "השלמות לחוברת הקורס", שניתן לצפות בתוכנה באתר הקורס באינטרנט.¹

עם קבלת חומר הלימוד בקורס עליכם להתחיל בלימוד עצמי, בקצב המותאם ללוח הזמנים שבהמשך חוברת זאת. בזמנים המומלצים בלוח הזמנים ללימוד יחידות הלימוד כלול גם הזמן הנדרש לפתרון והגשת המטלות. תכננו את זמנכם באופן שיאפשר לכם להגיש את המטלות במועדי ההגשה שנקבעו. מפגשי ההנחיה מתוכננים לפי לוח הזמנים ובהנחה שעיינתם בחומר הלימוד המתאים לפני כל מפגש.

לקורס אתר אינטרנט. חלק מהמטלות להגשה יש לפתור באתר הקורס באינטרנט ("מטלות אופל"). מטלות המנחה (הממ"נים) נמצאות בחוברת זאת (שגם עותק שלה נמצא באתר הקורס).

אתר הקורס מהווה עבורכם גם ערוץ תקשורת עיקרי עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. כאשר יהיו לכם רעיונות או שאלות בנושאי הלימוד, **העלו אותם לדיון בפורום שבאתר הקורס**.

הודעות, עדכונים ותיקונים למטלות, אם יהיו כאלה, יתפרסמו באתר הקורס.

צוות הקורס מעוניין לעזור לכם בלימודים. לכן, אם התעוררה בעיה או שאלה במהלך הלימוד, אל תהססו לפנות אלינו בהקדם. עומדות לרשותכם דרכי ההתקשרות הבאות:

- קבוצת דיון באתר הקורס.
- דואר אלקטרוני למרכז ההוראה בכתובת oferh@openu.ac.il.
- טלפון למרכז ההוראה בקורס, ד"ר עופר הדס, בימי ב' בין השעות 11:00-13:00.
- טלפון למנחה הקבוצה בשעת ההנחיה הטלפונית שלו המפורטת יחד עם לוח המפגשים.
- פניה למנחה במפגש ההנחיה.

אנו מאחלים לכם לימוד מהנה ומוצלח.

בברכה, צוות הקורס.

¹ פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שה"ם בכתובת <http://telem.openu.ac.il>. מידע על שירותי הספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספרייה בכתובת <http://www.openu.ac.il/Library>.

לוח זמנים ופעילויות (2021 \ 2022 ב)

מפגשי הנחיה *	מועדי משלוח המטלות	יחידת הלימוד המומלצת (כולל פתרון המטלות בנושא)	תאריכי שבוע הלימוד	שבוע לימוד
	הגישו את מטלה 01  באתר הקורס עד 26.3.2021 הגישו את ממ"ן 11  למנחה עד 26.3.2021	פרק 1	5.3.2021–28.2.2021	1
		פרק 2	12.3.2021–7.3.2021	2
			19.3.2021–14.3.2021	3
		פרק 3	26.3.2021–21.3.2021	4
	הגישו את מטלה 02  באתר הקורס עד 21.4.2021 הגישו את ממ"ן 12  למנחה עד 21.4.2021	פרק 4	2.4.2021–28.3.2021 (א-ו פסח)	5
		פרק 5	9.4.2021–4.4.2021 (ה יום הזכרון לשואה)	6
		פרק 6	16.4.2021–11.4.2021 (ד יום הזכרון, ה יום העצמאות)	7
		פרק 7	23.4.2021–18.4.2021	8
	הגישו את ממ"ן 13  למנחה עד 4.5.2021	פרק 8	30.4.2021–25.4.2021 (ו ל"ג בעומר)	9
			7.5.2021–2.5.2021	10
			פרק 9	14.5.2021–9.5.2021
	21.5.2021–16.5.2021 (ב שבועות)	12		
	28.5.2021–22.5.2021	13		
	פרק 10	4.6.2021–30.5.2021		14
		11.6.2021–6.6.2021	15	
	הגישו את ממ"ן 15  למנחה עד 11.6.2021			

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים, מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

תנאים לקבלת נקודות זכות

התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס הם :

- (1) עליכם להגיש מטלות שמשקלן הכולל לפחות 15 נקודות.
- (2) עליכם לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.
- (3) עליכם לקבל בציון הסופי 60 נקודות לפחות.

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.

ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית

למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת אופל 01

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
סמסטר : 2021
חומר הלימוד למטלה : פרקים 1–3
משקל המטלה : 2 נקודות
מועד אחרון להגשה : 26.3.2021

מטלת אופל נמצאות באתר הקורס.

כדי להגיש מטלת אופל היכנסו אליה באתר הקורס, ומלאו אחר ההוראות בגוף המטלה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 חומר הלימוד למטלה: פרקים 1–3
 מספר השאלות: 6
 מועד אחרון להגשה: 26.3.2021
 סמסטר: 2021

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (15 נקודות)

תהי A קבוצה ב- $\mathbb{R}^k$. הוכיחו שהקבוצה $A' = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x \in \partial(A \setminus \{x\})\}$ היא קבוצה סגורה.

שאלה 2 (15 נקודות)

יהי $k \geq 2$ ותהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חלקית שרציפה בסביבה נקובה של נקודה $a \in \mathbb{R}^k$. הוכיחו ש- f אינה חד־חד־ערכית.

שאלה 3 (15 נקודות)

א. הוכיחו שהמשוואה $xe^z + ye^{-z} + z = 1$ מגדירה באופן סתום בקבוצה $A \times [0, \infty)$ את z כפונקציה של (x, y) , כאשר:

$$A = \{(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \mid x + y \leq 1\}$$

ב. תהי $f: A \rightarrow [0, \infty)$ הפונקציה שלפי סעיף א מוגדרת באופן סתום בקבוצה $A \times [0, \infty)$. הוכיחו כי:

$$f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow 0^{[2]}} 1$$

ג. הראו שהגרף של $f|_{A \setminus \partial A}$ הוא טלאי דו־ממדי (ובפרט, הוא משטח).

שאלה 4 (15 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי

$$x = (x_1, \dots, x_k) \mapsto \frac{\sum_{i=1}^k (-1)^i x_i^{2021}}{\sum_{i=1}^k x_i^{2020}}$$

כאשר $x \neq 0^{[k]}$ ו- $0^{[k]} \mapsto 0$.

א. האם f רציפה ב- $0^{[k]}$?

ב. האם f גזירה ב- $0^{[k]}$?

שאלה 5 (20 נקודות)

תהינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ ו- $f, g, h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות חלקיות, ותהי $U = (A \cup B) \setminus \partial(A \cup B)$. נתון ש- f גזירה בכל נקודה ב- A ו- g גזירה בכל נקודה ב- B . נתון שלכל $x \in A \cap B$ מתקיים $f(x) = g(x)$ וגם $\nabla f(x) = \nabla g(x)$. הפונקציה h מוגדרת על ידי $h(x) = f(x)$ אם $x \in A$ ו- $h(x) = g(x)$ אם $x \in B$. א. הפריכו על ידי דוגמה מתאימה את הטענה: "אם h רציפה ב- U אז h גזירה ב- U ". ב. הוכיחו כי אם A ו- B הן קבוצות סגורות אז h גזירה ב- U .

שאלה 6 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה בעלת גזירה חלקית ברציפות בכל המישור. נתון שמתקיים $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. יהי $u = (\alpha, \beta)$, תהי $p \in \mathbb{R}^2$ ונסמן $\gamma = \|\nabla f(p)\|$. כמובן ידוע ש- $\frac{\partial f}{\partial x}(p) \geq 0$. א. מצאו את הנגזרת הכיוונית $\partial_u f(p)$ (במונחים של הפרמטרים α, β, γ). ב. הוכיחו שלכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ מתקיים $f(x, y) = f(x + y, 0)$.

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת אופל 02

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
סמסטר : 2021ב
חומר הלימוד למטלה : פרקים 4–7
משקל המטלה : 2 נקודות
מועד אחרון להגשה : 21.4.2021

מטלת אופל נמצאות באתר הקורס.

כדי להגיש מטלת אופל היכנסו אליה באתר הקורס, ומלאו את ההוראות בגוף המטלה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 חומר הלימוד למטלה: פרקים 4–7
 סמסטר: 2021
 משקל המטלה: 5 נקודות
 מועד אחרון להגשה: 21.4.2021
 מספר השאלות: 6

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")	
• באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).	
• באמצעות מערכת המטלות המקוונת.	

שאלה 1 (16 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות ב- $\mathbb{R}^3$. נניח שלכל $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ מתקיים

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{השוויון} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) \quad \text{נגדיר פונקציה:}$$

$$(x, y) \mapsto \int_0^y f(x, y-z, z) dz$$

הוכיחו שלכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ מתקיים:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + f(x, 0, y)$$

שאלה 2 (16 נקודות)

תהי f פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $\mathbb{R}$ שגזירה ברציפות בנקודה $a \in \mathbb{R}^k$ וכך ש- $f(a) = 0$.

תהי g הפונקציה המוגדרת על ידי $x \mapsto f(x)^2$.

הוכיחו ש- g גזירה פעמיים בנקודה a ושמתקיים $Hg_a = 2\nabla f(a)^T \nabla f(a)$.

שאלה 3 (16 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות והומוגנית-חיובית ממעלה 0. הוכיחו:

א. לכל $a \in \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ מטריצת ההסיאן Hf_a אינה חיובית לחלוטין ואינה שלילית לחלוטין.

ב. יש ל- f מקסימום ומינימום ב- $\mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$.

שאלה 4 (16 נקודות)

הוכיחו שהקבוצה $\{A + A^2 \mid A \in M_{k \times k}(\mathbb{R})\}$ מכילה סביבה של 0.

שאלה 5 (16 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות והומוגנית חיובית ממעלה 1.
הראו שהגרף $G(f)$ הוא משטח יעל חלק שלכל מישור ייחל העל המשיקים לו נקודה משותפת.

שאלה 6 (20 נקודות)

יהי α מספר ממשי ותהי:
$$A = \left\{ (x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x + y + z = \alpha \right\}$$

הוכיחו כי לפונקציה $f: (x, y, z) \mapsto xy + yz + xz - 2xyz$ יש ערך מוערי ב־ A אם ורק אם $\alpha \geq 4.5$.
(עצה: בדאי לחשוב גם על ערכי f ב־ ∂A).

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 סמסטר: 2021
 חומר הלימוד למטלה: פרק 8
 משקל המטלה: 5 נקודות
 מספר השאלות: 5
 מועד אחרון להגשה: 4.5.2021

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (20 נקודות)

תהינה $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ו- $\psi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ מסילות שאורכן סופי. תהי: $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $t \mapsto \varphi(t) \times \psi(t)$
 א. הוכיחו כי γ היא מסילה שאורכה סופי. (מומלץ להיעזר במגוון משפטים).
 ב. אם φ ו- ψ הן מסילות סדירות, האם גם γ היא מסילה סדירה?

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ מסילה שאורכה סופי.
 א. הראו שאם φ היא מסילה פשוטה, לולאה פשוטה או מסילה סדירה, אז יש מספר חיובי γ ומסילה יחידה $\psi: [0, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}^k$ ששקולה ל- φ ובעלת התכונה: $L(\psi|_{[0,s]}) = s$ לכל $s \in (0, \gamma]$.
 ב. הוכיחו כי אם $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בתמונת המסילה אז: $\int_{\varphi} f(x) |dx| = \int_0^{\gamma} f(\psi(s)) ds$

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ובעלת השתנות חסומה המקיימת $f(a) = f(b) = 0$.
 נסמן $\varphi(t) = (t, f(t))$ לכל $t \in [a, b]$. הוכיחו כי: $\int_{\varphi} (2xy + y) dx + x^2 dy = \int_a^b f(x) dx$

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי $F: \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\} \rightarrow \mathbb{R}^k$ פונקציה גזירה ברציפות כך שלכל $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ המטריצה JF_x היא מטריצה סימטרית. תהי $a \in \mathbb{R} \setminus \{0^{[k]}\}$ ותהי $\tau: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ ההזזה $x \mapsto x - a$.
 הוכיחו שהפונקציה $F - F \circ \tau$ היא שדה משמר בקבוצה $\mathbb{R}^k \setminus \{ta \mid 0 \leq t \leq 1\}$.

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ הפונקציה שמוגדרת על ידי :

$$(x,y) \mapsto \left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{3y}{x^2+y^2}, \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{3x}{x^2+y^2} \right)$$

א. האם F שדה משמר בתחום הגדרתה? האם היא שדה משמר בקבוצה פתוחה אחרת?

ב. נתונה מסילה $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3 * \varphi_4 * \varphi_5$ ולכל i המסילה φ_i היא מסילה פשוטה שתמונתה

קטע שקצותיו P_i ו- P_{i-1} כאשר :

$$P_0 = (-1, -1), P_1 = (0, 2), P_2 = (1, -1), P_3 = (-2, 1), P_4 = (2, 1), P_5 = (-1, -1)$$

שרטטו את המסילה במערכת צירים וחשבו את האינטגרל המסילתי $\int_{\varphi} F \cdot (dx, dy)$.

►►► סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 חומר הלימוד למטלה: פרק 9
 מספר השאלות: 5
 סמסטר: 2021
 משקל המטלה: 6 נקודות
 מועד אחרון להגשה: 26.5.2021

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (20 נקודות)

יהי $a \in \mathbb{R}^k$ ותהי A קבוצה ב- $\mathbb{R}^k$. נניח שלכל מספר טבעי n יש קבוצה בעלת נפח K_n ב- $\mathbb{R}^k$ כך שמתקיים $A \cap B^k(a; n) \subseteq K_n$ ושמתיקיים $\text{vol}_k(K_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. הוכיחו ש- A קבוצה צנומה.

שאלה 2 (20 נקודות)

חשבו את האינטגרל המרובה:

$$\int_{[0,1]^k} \max\{x_1, \dots, x_k\} dx_1 \cdots dx_k$$

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי U קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^k$ ויהי $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ דיפאומורפיזם. הוכיחו ש- $|\det J\varphi_x| = 1$ לכל $x \in U$ אם ורק אם $\text{vol}_k(\varphi(K)) = \text{vol}_k(K)$ לכל $K \subseteq U$ שהיא סגורה, חסומה ובעלת נפח.

שאלה 4 (20 נקודות)

הוכיחו שלקבוצה $A = \{(x, y, z) \mid x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 \leq 1\}$ יש נפח מוכלל, דהיינו האינטגרל המוכלל של הפונקציה הקבועה $1 \mapsto (x, y, z)$ בקבוצה A מתכנס. (עצה: אל תנסו לחשב את הנפח).

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $D = \{(x, y) \mid x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$. תהי φ לולאה פשוטה סדירה שתמונתה היא השפה של קבוצה סגורה וחסומה A השוכנת לשמאל הלולאה φ , כך שראשית הצירים היא נקודה פנימית של A . הוכיחו כי:

$$\text{vol}_2(D) = \frac{1}{2} \oint_{\varphi} \frac{xdy - ydx}{x^2 + xy + y^2}$$

רמז: ראשית הראו שהנוסחה נכונה בהנחה ש- $A = D$. אחרי כן הראו שהיא נכונה גם ללא הנחה זאת.

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 חומר הלימוד למטלה: פרק 10
 סמסטר: 2021
 משקל המטלה: 5 נקודות
 מספר השאלות: 4
 מועד אחרון להגשה: 11.6.2021

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (25 נקודות)

$$S = \left\{ (x, y, z) \mid (x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2 \right\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

הראו שהקבוצה

היא משטח חלק וחשבו את $\sigma_2(S)$. (שימו לב: מדובר בשטח מוכלל).

שאלה 2 (25 נקודות)

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

הי $R > 0$ ותהי

$$(x, y, z) \mapsto (xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z)$$

$$S = \left\{ (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}$$

חשבו את האינטגרל $\iint_S F \cdot N d\sigma_2$ כאשר

N הוא נורמל היחידה למשטח $S^2((0, 0, 0), R)$ הפונה החוצה מהקבוצה $\bar{B}^3((0, 0, 0), R)$.

שאלה 3 (25 נקודות)

$$K = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}$$

שתהיה חלק מפני כדור,

עם האוריינטציה המתאימה לנורמל לא־מתאפס רציף הפונה החוצה מהכדור הזה.

$$\iint_K xy dy \wedge dz - yz dx \wedge dz + xz dx \wedge dy$$

חשבו את האינטגרל:

שאלה 4 (25 נקודות)

$$C = \left\{ (x, y, z) \mid x + 2y + 3z = 4, x^2 + y^2 = 2x \right\}$$

הראו שהקבוצה היא יריעה חלקה חד־ממדית.

תהי $\varphi: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^3$ לולאה פשוטה שתמונתה C , ושידוע עליה:

$$\varphi(0) = (0, 0, \frac{4}{3}), \varphi(2) = (2, 0, \frac{2}{3}), \varphi(3) = (1, 1, \frac{1}{3})$$

$$\oint_{\varphi} Pdx + Qdy + Rdz$$

חשבו את האינטגרל

$$P = x + 2y + 3z, \quad Q = y + 2z + 3x, \quad R = z + 2x + 3y$$

כאשר:

►►► סוף המטלה