

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 חומר הלימוד למטלה: פרק 9
 מספר השאלות: 5
 סמסטר: 2021
 משקל המטלה: 6 נקודות
 מועד אחרון להגשה: 26.5.2021

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (20 נקודות)

יהי $a \in \mathbb{R}^k$ ותהי A קבוצה ב- $\mathbb{R}^k$. נניח שלכל מספר טבעי n יש קבוצה בעלת נפח K_n ב- $\mathbb{R}^k$ כך שמתקיים $A \cap B^k(a; n) \subseteq K_n$ ושמתיקיים $\text{vol}_k(K_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. הוכיחו ש- A קבוצה צנומה.

שאלה 2 (20 נקודות)

חשבו את האינטגרל המרובה:

$$\int_{[0,1]^k} \max\{x_1, \dots, x_k\} dx_1 \cdots dx_k$$

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי U קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^k$ ויהי $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ דיפאומורפיזם. הוכיחו ש- $|\det J\varphi_x| = 1$ לכל $x \in U$ אם ורק אם $\text{vol}_k(\varphi(K)) = \text{vol}_k(K)$ לכל $K \subseteq U$ שהיא סגורה, חסומה ובעלת נפח.

שאלה 4 (20 נקודות)

הוכיחו שלקבוצה $A = \{(x, y, z) \mid x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 \leq 1\}$ יש נפח מוכלל, דהיינו האינטגרל המוכלל של הפונקציה הקבועה $1 \mapsto (x, y, z)$ בקבוצה A מתכנס. (עצה: אל תנסו לחשב את הנפח).

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $D = \{(x, y) \mid x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$. תהי φ לולאה פשוטה סדירה שתמונתה היא השפה של קבוצה סגורה וחסומה A השוכנת לשמאל הלולאה φ , כך שראשית הצירים היא נקודה פנימית של A . הוכיחו כי:

$$\text{vol}_2(D) = \frac{1}{2} \oint_{\varphi} \frac{xdy - ydx}{x^2 + xy + y^2}$$

רמז: ראשית הראו שהנוסחה נכונה בהנחה ש- $A = D$. אחרי כן הראו שהיא נכונה גם ללא הנחה זאת.

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: 5\74ב\2020

לשאלה 2: 2\14ב\2020 עם שינוי קל מ $\min$ ל $\max$.

לשאלה 3: 5\72ב\2020

לשאלה 4: 5\85ב\2020

לשאלה 5: 5\14ב\2020. הניסוח בכוונה עוקב מילה במילה אחרי שאלה 9.ט.22 בספר.