

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 סמסטר: 2021
 חומר הלימוד למטלה: פרק 8
 משקל המטלה: 5 נקודות
 מספר השאלות: 5
 מועד אחרון להגשה: 4.5.2021

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהינה $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ו- $\psi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ מסילות שאורכן סופי. תהי: $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $t \mapsto \varphi(t) \times \psi(t)$

א. הוכיחו כי γ היא מסילה שאורכה סופי. (מומלץ להיעזר במגוון משפטים).

ב. אם φ ו- ψ הן מסילות סדירות, האם גם γ היא מסילה סדירה?

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ מסילה שאורכה סופי.

א. הראו שאם φ היא מסילה פשוטה, לולאה פשוטה או מסילה סדירה, אז יש מספר חיובי γ

ומסילה יחידה $\psi: [0, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}^k$ ששקולה ל- φ ובעלת התכונה: $L(\psi|_{[0,s]}) = s$ לכל $s \in (0, \gamma]$.

ב. הוכיחו כי אם $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בתמונת המסילה φ אז: $\int_{\varphi} f(x) |dx| = \int_0^{\gamma} f(\psi(s)) ds$

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ובעלת השתנות חסומה המקיימת $f(a) = f(b) = 0$.

נסמן $\varphi(t) = (t, f(t))$ לכל $t \in [a, b]$. הוכיחו כי: $\int_{\varphi} (2xy + y) dx + x^2 dy = \int_a^b f(x) dx$

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי $F: \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\} \rightarrow \mathbb{R}^k$ פונקציה גזירה ברציפות כך שלכל $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ המטריצה JF_x היא

מטריצה סימטרית. תהי $a \in \mathbb{R} \setminus \{0^{[k]}\}$ ותהי $\tau: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ ההזזה $x \mapsto x - a$.

הוכיחו שהפונקציה $F - F \circ \tau$ היא שדה משמר בקבוצה $\{ta \mid 0 \leq t \leq 1\}$.

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ הפונקציה שמוגדרת על ידי :

$$(x,y) \mapsto \left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{3y}{x^2+y^2}, \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{3x}{x^2+y^2} \right)$$

א. האם F שדה משמר בתחום הגדרתה? האם היא שדה משמר בקבוצה פתוחה אחרת?

ב. נתונה מסילה $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3 * \varphi_4 * \varphi_5$ ולכל i המסילה φ_i היא מסילה פשוטה שתמונתה

קטע שקצותיו P_i ו- P_{i-1} כאשר :

$$P_0 = (-1, -1), P_1 = (0, 2), P_2 = (1, -1), P_3 = (-2, 1), P_4 = (2, 1), P_5 = (-1, -1)$$

שרטטו את המסילה במערכת צירים וחשבו את האינטגרל המסילתי $\int_{\varphi} F \cdot (dx, dy)$.

►►► סוף המטלה

הערות

לשאלה 1 : 2020ב\13\1.

לשאלה 2 : 2020ב\13\2.

לשאלה 3 : 2020ב\85\4.

לשאלה 4 : 2020ב\72\4.

לשאלה 5 : 2020ב\74\4.