

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 חומר הלימוד למטלה: פרקים 1–3
 מספר השאלות: 6
 מועד אחרון להגשה: 26.3.2021
 סמסטר: 2021

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (15 נקודות)

תהי A קבוצה ב- $\mathbb{R}^k$. הוכיחו שהקבוצה $A' = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x \in \partial(A \setminus \{x\})\}$ היא קבוצה סגורה.

שאלה 2 (15 נקודות)

יהי $k \geq 2$ ותהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חלקית שרציפה בסביבה נקובה של נקודה $a \in \mathbb{R}^k$. הוכיחו ש- f אינה חד־חד־ערכית.

שאלה 3 (15 נקודות)

א. הוכיחו שהמשוואה $xe^z + ye^{-z} + z = 1$ מגדירה באופן סתום בקבוצה $A \times [0, \infty)$ את z כפונקציה של (x, y) , כאשר:

$$A = \{(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \mid x + y \leq 1\}$$

ב. תהי $f: A \rightarrow [0, \infty)$ הפונקציה שלפי סעיף א מוגדרת באופן סתום בקבוצה $A \times [0, \infty)$. הוכיחו כי:

$$f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow 0^{[2]}} 1$$

ג. הראו שהגרף של $f|_{A \setminus \partial A}$ הוא טלאי דו־ממדי (ובפרט, הוא משטח).

שאלה 4 (15 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי

$$x = (x_1, \dots, x_k) \mapsto \frac{\sum_{i=1}^k (-1)^i x_i^{2021}}{\sum_{i=1}^k x_i^{2020}}$$

כאשר $x \neq 0^{[k]}$ ו- $0^{[k]} \mapsto 0$.

א. האם f רציפה ב- $0^{[k]}$?

ב. האם f גזירה ב- $0^{[k]}$?

שאלה 5 (20 נקודות)

תהינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ ו- $f, g, h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות חלקיות, ותהי $U = (A \cup B) \setminus \partial(A \cup B)$. נתון ש- f גזירה בכל נקודה ב- A ו- g גזירה בכל נקודה ב- B . נתון שלכל $x \in A \cap B$ מתקיים $f(x) = g(x)$ וגם $\nabla f(x) = \nabla g(x)$. הפונקציה h מוגדרת על ידי $h(x) = f(x)$ אם $x \in A$ ו- $h(x) = g(x)$ אם $x \in B$. א. הפריכו על ידי דוגמה מתאימה את הטענה: "אם h רציפה ב- U אז h גזירה ב- U ". ב. הוכיחו כי אם A ו- B הן קבוצות סגורות אז h גזירה ב- U .

שאלה 6 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה בעלת גזירה חלקית ברציפות בכל המישור. נתון שמתקיים $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. יהי $u = (\alpha, \beta)$, תהי $p \in \mathbb{R}^2$ ונסמן $\gamma = |\nabla f(p)|$. כמובן ידוע ש- $\frac{\partial f}{\partial x}(p) \geq 0$. א. מצאו את הנגזרת הכיוונית $\partial_u f(p)$ (במונחים של הפרמטרים α, β ו- γ). ב. הוכיחו שלכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ מתקיים $f(x, y) = f(x + y, 0)$.

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1 : 1\85ב\2020.

לשאלה 2 : 1\72ב\2020.

לשאלה 3 : 2\11ב\2020.

לשאלה 4 : 2\74ב\2020.

לשאלה 5 : 2\72ב\2020.

לשאלה 6 : 3\86ב\2017 מותאמת בניסוח (שאלה 11 ב"אוסף שאלות בחינה", נכון לרגע זה).