

האוניברסיטה הפתוחה

20224

חשבון אינפיניטסימלי 3

חוברת הקורס - אביב 2020ב

כתב: ד"ר עופר חדס

מרץ 2020 - סמסטר אביב - תש"פ

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

א	אל הסטודנטים
ב	לוח זמנים ופעילויות
ג	התנאים לקבלת נקודות זכות
1	ממ"ח 01
2	ממ"ן 11
4	ממ"ח 02
5	ממ"ן 12
6	ממ"ן 13
9	ממ"ן 14
10	ממ"ן 15

אל הסטודנטים,

אנו שמחים לקדם את פניכם עם הצטרפותכם אל לומדי הקורס חשבון אינפיניטסימלי 3.

חוברת זאת כוללת פרטים שעליכם לדעת, כדי שתוכלו לבצע את המוטל עליכם בלימוד קורס זה. פרטים חשובים נוספים כלולים בחוברת "השלמות לחוברת הקורס", שניתן לצפות בתוכנה באתר הקורס באינטרנט.¹

שימו לב: בסמסטר זה הקורס נלמד במתכונת חדשה, שונה מהמתכונת בה הוא נלמד בשנים הקודמות, מספרי לימוד חדשים.

עם קבלת חומר הלימוד בקורס עליכם להתחיל בלימוד עצמי, בקצב המותאם ללוח הזמנים שבהמשך חוברת זאת. בזמנים המומלצים בלוח הזמנים ללימוד יחידות הלימוד כלול גם הזמן הנדרש לפתרון והגשת המטלות. תכננו את זמנכם באופן שיאפשר לכם להגיש את המטלות במועדי ההגשה שנקבעו. מפגשי ההנחיה מתוכננים לפי לוח הזמנים ובהנחה שעיינתם בחומר הלימוד המתאים לפני כל מפגש.

לקורס אתר אינטרנט. חלק מהמטלות להגשה יש לפתור באתר הקורס באינטרנט ("מטלות אופל"). מטלות המנחה (הממ"נים) נמצאות בחוברת זאת (שגם עותק שלה נמצא באתר הקורס).

אתר הקורס מהווה עבורכם גם ערוץ תקשורת עיקרי עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. כאשר יהיו לכם רעיונות או שאלות בנושאי הלימוד, **העלו אותם לדיון בפורום שבאתר הקורס.**

הודעות, עדכונים ותיקונים למטלות, אם יהיו כאלה, יתפרסמו באתר הקורס.

צוות הקורס מעוניין לעזור לכם בלימודים. לכן, אם התעוררה בעיה או שאלה במהלך הלימוד, אל תהססו לפנות אלינו בהקדם. עומדות לרשותכם דרכי ההתקשרות הבאות:

- קבוצת דיון באתר הקורס.
- דואר אלקטרוני למרכז ההוראה בכתובת oferh@openu.ac.il.
- טלפון למרכז ההוראה בקורס, ד"ר עופר הדס, בימי ב' בין השעות 11:00-13:00.
- טלפון למנחה הקבוצה בשעת ההנחיה הטלפונית שלו המפורטת יחד עם לוח המפגשים.
- פניה למנחה במפגש ההנחיה.

אנו מאחלים לכם לימוד מהנה ומוצלח.

בברכה, צוות הקורס.

¹ פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שה"ם בכתובת <http://telem.openu.ac.il>. מידע על שירותי הספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספרייה בכתובת <http://www.openu.ac.il/Library>.

לוח זמנים ופעילויות (2024 \ 2020ב)

מפגשי הנחיה *	מועדי משלוח המטלות	יחידת הלימוד המומלצת (כולל פתרון המטלות בנושא)	תאריכי שבוע הלימוד	שבוע לימוד
	01 מטלה  הגישו את מטלה 01 באתר הקורס עד 10.4.2020 11 ממ"ן  הגישו את ממ"ן 11 למנחה עד 10.4.2020	פרק 1	20.3.2020–15.3.2020	1
		פרק 2	27.3.2020–22.3.2020	2
		פרק 3	3.4.2020–29.3.2020	3
			10.4.2020–5.4.2020 (ד ערב פסח, ה-ו פסח)	4
	02 מטלה  הגישו את מטלה 02 באתר הקורס עד 6.5.2020 12 ממ"ן  הגישו את ממ"ן 12 למנחה עד 6.5.2020	פרק 4	17.4.2020–12.4.2020 (א-ד פסח)	5
		פרק 5	24.4.2020–19.4.2020 (ג יום הזכרון לשואה)	6
		פרק 6		7
		פרק 7	1.5.2020–26.4.2020 (ג יום הזכרון, ד יום העצמאות)	8
	13 ממ"ן  הגישו את ממ"ן 13 למנחה עד 19.5.2020	פרק 8	8.5.2020–3.5.2020	9
			15.5.2020–10.5.2020 (ג ל"ג בעומר)	10
		פרק 9	22.5.2020–17.5.2020	11
			29.5.2020–24.5.2020 (ו שבועות)	12
			5.6.2020–31.5.2020	13
	14 ממ"ן  הגישו את ממ"ן 14 למנחה עד 10.6.2020	פרק 10	12.6.2020–7.6.2020	14
			19.6.2020–14.6.2020	15
			26.6.2020–21.6.2020	
	15 ממ"ן  הגישו את ממ"ן 15 למנחה עד 26.6.2020			

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים, מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

תנאים לקבלת נקודות זכות

התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס הם :

(1) עליכם להגיש מטלות שמשקלן הכולל לפחות 15 נקודות.

(2) עליכם לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.

(3) עליכם לקבל בציון הסופי 60 נקודות לפחות.

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.

ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

**אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית
למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.**

מטלת אופל 01

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
סמסטר : 2020
חומר הלימוד למטלה : פרקים 1–3
משקל המטלה : 2 נקודות
מועד אחרון להגשה : 10.4.2020

מטלת אופל נמצאות באתר הקורס.

כדי להגיש מטלת אופל היכנסו אליה באתר הקורס, ומלאו אחר ההוראות בגוף המטלה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 חומר הלימוד למטלה: פרקים 1–3
 מספר השאלות: 5
 סמסטר: 2020
 משקל המטלה: 5 נקודות
 מועד אחרון להגשה: 10.4.2020

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה אינסופית חסומה.
 א. הוכיחו כי אם $k \geq 2$ אז ∂A היא קבוצה אינסופית.
 ב. עבור $k = 1$ הראו, עלידי דוגמאות מתאימות, שיתכן ש- ∂A היא קבוצה סופית ויתכן גם ש- ∂A היא קבוצה אינסופית.

שאלה 2 (20 נקודות)

א. הוכיחו שהמשוואה $xe^z + ye^{-z} + z = 1$ מגדירה באופן סתום בקבוצה $A \times [0, \infty)$ את z כפונקציה של (x, y) , כאשר:
 $A = \{(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \mid x + y \leq 1\}$
 ב. תהי $f: A \rightarrow [0, \infty)$ הפונקציה שלפי סעיף א מוגדרת באופן סתום בקבוצה $A \times [0, \infty)$.
 הוכיחו כי:

$$f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow 0^{[2]}} 1$$

 ג. הראו שהגרף של $f|_{A \setminus \partial A}$ הוא טלאי דריממדי (ובפרט, הוא משטח).

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי $k \geq 2$. תהי $\varphi: \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה שמוגדרת בכל נקודה ב- $\mathbb{R}^{k-1}$.
 תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי
 $(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) \mapsto 0$
 וכן, כאשר $x_k \neq 0$:
 $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) \mapsto x_k \cdot \varphi\left(\frac{x_1}{x_k}, \dots, \frac{x_{k-1}}{x_k}\right)$
 הוכיחו ש- f גזירה ב- $0^{[k]}$ אם ורק אם φ היא פונקציה קבועה ב- $\mathbb{R}^{k-1}$.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי f פונקציה סקלרית המוגדרת וגזירה ב- $\mathbf{R}^2$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ לכל $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

א. הראו שיש פונקציה חלקית $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ שמוגדרת וגזירה בכל נקודה ב- $[0, \infty)$ כך שמתקיים

$$f(v) = \varphi(|v|) \quad \text{לכל } v \in \mathbf{R}^2.$$

ב. מצאו את $\nabla f(0, 0)$.

שאלה 5 (20 נקודות)

נגדיר לכל n טבעי פונקציה חלקית $f_n: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ כך:

$$f_1: (x, y, z) \mapsto \left(z \cos(x + y), \cos y - e^{x-z}, \frac{z-y}{1-z} \right)$$

$$f_{n+1} = f_n \circ f_1$$

א. הראו שהפונקציות f_n הן פונקציות יסודיות.

ב. הראו ש- $g = f_{2020}$ גזירה ברציפות ב- $0^{[3]}$ ומצאו את $Jg_{0^{[3]}}$.

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת אופל 02

סמסטר : 2020ב

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 2 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרקים 4–7

מועד אחרון להגשה : 6.5.2020

מטלת אופל נמצאות באתר הקורס.

כדי להגיש מטלת אופל היכנסו אליה באתר הקורס, ומלאו את ההוראות בגוף המטלה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
חומר הלימוד למטלה: פרקים 4–7
מספר השאלות: 6
סמסטר: 2020
משקל המטלה: 5 נקודות
מועד אחרון להגשה: 6.5.2020

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (17 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות ב- $\mathbb{R}^3$. נניח שלכל $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ מתקיים

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{השוויון} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) \quad \text{נגדיר פונקציה:}$$
$$(x, y) \mapsto \int_0^y f(x, y-z, z) dz$$

הוכיחו שלכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ מתקיים:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + f(x, 0, y)$$

שאלה 2 (17 נקודות)

- א. הראו שהפונקציה f משאלה 2 בממ"ן 11 גזירה ברציפות בקבוצה $A \setminus \partial A$.
- ב. הראו שהטלאי מסעיף ג של שאלה 2 בממ"ן 11 הוא טלאי חלק.

שאלה 3 (17 נקודות)

הראו שהקבוצה

$$S = \left\{ (x, y, z) \mid \begin{cases} \sin x + \cos y + \tan z = 1 \\ \cos x + \tan y + \sin z = 1 \end{cases} \right\}$$

היא יריעה חלקה חד-ממדית, ומצאו את הישר המשיק לה בנקודה $(0, 0, 0)$.

שאלה 4 (12 נקודות)

תהינה $f, g, h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות חלקיות שמוגדרות וגזירות ברציפות בקבוצה פתוחה U .

הוכיחו שאם a היא נקודת קיצון של f בקבוצה $\{x \in U \mid g(x) = h(x) = 0\}$ אז הוקטור $\nabla f(a)$ ניצב לוקטור $\nabla g(a) \times \nabla h(a)$.

שאלה 5 (17 נקודות)

הוכיחו שהקבוצה $\{A + A^2 \mid A \in M_{k \times k}(\mathbb{R})\}$ מכילה סביבה של 0.

שאלה 6 (20 נקודות)

מצאו את כל נקודות הקיצון וערכי הקיצון של הפונקציה

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in (0, \infty)^4 \mid \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 9 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 2 \end{array} \right\} \quad \text{בקבוצה:}$$

שימו לב: אם אין מינימום או מקסימום עליכם להוכיח שאין. אם יש עליכם להוכיח שיש, ולמצוא אותם במפורש.

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 סמסטר: 2020
 חומר הלימוד למטלה: פרק 8
 משקל המטלה: 5 נקודות
 מספר השאלות: 5
 מועד אחרון להגשה: 19.5.2020

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (20 נקודות)

תהינה $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ו- $\psi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ מסילות שאורכן סופי. תהי: $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $t \mapsto \varphi(t) \times \psi(t)$

א. הוכיחו כי γ היא מסילה שאורכה סופי. (מומלץ להיעזר במגוון משפטים).

ב. אם φ ו- ψ הן מסילות סדירות, האם גם γ היא מסילה סדירה?

שאלה 2 (20 נקודות)

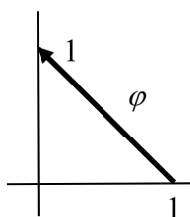
תהי $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ מסילה שאורכה סופי.

א. הראו שאם φ היא מסילה פשוטה, לולאה פשוטה או מסילה סדירה, אז יש מספר חיובי γ

ומסילה יחידה $\psi: [0, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}^k$ ששקולה ל- φ ובעלת התכונה: $L(\psi|_{[0,s]}) = s$ לכל $s \in (0, \gamma]$.

ב. הוכיחו כי אם $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בתמונת המסילה φ אז: $\int_{\varphi} f(x) |dx| = \int_0^{\gamma} f(\psi(s)) ds$

שאלה 3 (20 נקודות)



חשבו את האינטגרל של התבנית $\frac{x^3}{(x^2 + y^2)^3} dx + \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^3} dy$

על המסילה שבאיור:

(מומלץ להיעזר בשאלה 21.8 ו-21.9 ועובדות נוספות שמוכחות בספר הלימוד).

שאלה 4 (20 נקודות)

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

הראו כי הפונקציה

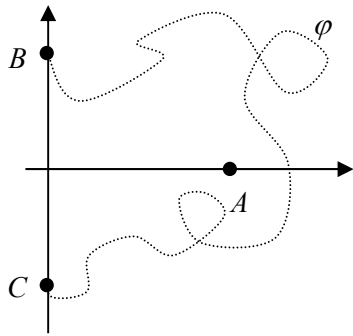
$$(x, y) \mapsto \frac{e^x}{x^2 + y^2} (x \sin y - y \cos y, y \sin y + x \cos y)$$

$$U = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 > 100 \}$$

אינה שדה משמר בקבוצה :

המלצה: ראשית כדאי להראות שהפונקציה היא שדה משמר בכל קבוצה פתוחה ופשוטת-קשר בה היא מוגדרת.

שאלה 5 (20 נקודות)



יהיו a ו- b מספרים חיוביים כך שהנקודות $A = (a, 0)$,

$B = (0, b)$ ו- $C = (0, -b)$ הן קודקודי משולש שווה-צלעות.

φ היא מסילה מ- B ל- C שאורכה סופי המתוארת באיור :

$$P(x, y) = \frac{-y}{(x-a)^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2}$$

נתונות

$$\int_{\varphi} Pdx + Qdy$$

חשבו את האינטגרל

(קבלו תוצאה מספרית, שאינה תלויה במספרים a ו- b). פרטו ונמקו היטב את כל שיקוליכם!

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
חומר הלימוד למטלה: פרק 9
מספר השאלות: 5
מועד אחרון להגשה: 10.6.2020
משקל המטלה: 6 נקודות
סמסטר: 2020

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $A \subseteq (0, \infty)$. תהי $B = \bigcup_{r \in A} S^{k-1}(0^{[k]}, r)$. הוכיחו כי אם A קבוצה צנומה אז B קבוצה צנומה.
(רשות ולא להגשה: האם הטענה ההפוכה נכונה?)

שאלה 2 (20 נקודות)

חשבו את האינטגרל המרובה:
$$\int_{[0,1]^k} \min\{x_1, \dots, x_k\} dx_1 \cdots dx_k$$

שאלה 3 (20 נקודות)

חשבו את הנפח והמרכז הגיאומטרי של הקבוצה:
$$\{(x, y, z) \mid x^2 e^{-2z} + y^2 e^{2z} \leq \sin z, 0 \leq z \leq \pi\}$$

שאלה 4 (20 נקודות)

הוכיחו כי $f(x) = e^{\lfloor \ln|x| \rfloor}$ אינטגרלית בקבוצה $A = B^k(0,1) \setminus \{0\}$ וחשבו את האינטגרל $\int_A f$.

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $D = \{(x, y) \mid x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$. תהי φ לולאה פשוטה סדירה שתמונתה היא השפה של קבוצה סגורה וחסומה A השוכנת לשמאל הלולאה φ , כך שראשית הצירים היא נקודה פנימית של A . הוכיחו כי:
$$\text{vol}_2(D) = \frac{1}{2} \oint_{\varphi} \frac{xdy - ydx}{x^2 + xy + y^2}$$

רמז: ראשית הראו שהנוסחה נכונה בהנחה ש- $A = D$. אחרי כן הראו שהיא נכונה גם ללא הנחה זאת.

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 חומר הלימוד למטלה: פרק 10
 מספר השאלות: 5
 מועד אחרון להגשה: 26.6.2020
 סמסטר: 2020

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (5 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ שגזירה פעמיים בנקודה a . הוכיחו ש- $\nabla \cdot \nabla f(a) = \text{tr } Hf(a)$.

שאלה 2 (25 נקודות)

יהי $k \geq 2$. תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה הרמונית ב- $\mathbb{R}^k$, דהיינו גזירה פעמיים ברציפות ומתקיים

$$\text{tr } Hf(a) = 0 \quad \text{לכל } a \in \mathbb{R}^k.$$

הוכיחו שהקבוצה

$$\left\{ (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid (x_1^{2019}, \dots, x_k^{2019}) \cdot \nabla f(x_1, \dots, x_k) = 0 \right\}$$

אינה חסומה. עצה: היעזרו בקבוצה $\left\{ (x_1, \dots, x_k) \mid x_1^{2020} + \dots + x_k^{2020} \leq C \right\}$ עם קבוע כלשהו C ובמשפט הדיברגנץ.

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי $k \geq 2$. תהי K קבוצה סגורה, חסומה ובעלת נפח ב- $\mathbb{R}^k$, ששפתה ∂K היא משטח על חלק

$$\text{ומתקיים } \partial(K \setminus \partial K) = \partial K. \quad \text{הוכיחו כי}$$

$$\text{vol}_k(K) = \frac{1}{k} \int_{\partial K} x \cdot N(x) d\sigma_{k-1}$$

כאשר $N: \partial K \rightarrow \mathbb{R}^k$ הוא נורמל יחידה למשטח על ∂K הפונה החוצה מהקבוצה K .

שאלה 4 (25 נקודות)

$$\text{חשבו את} \quad \iint_S (2x + 3y^2 + e^z) dy \wedge dz - (\sin xz + y + 4z^5) dx \wedge dz + ((x+y)^2 - z) dx \wedge dy$$

$$\text{כאשר} \quad S = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq \pi^2, z = \cos \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

הוא משטח עם אוריינטציה שנקבעת כך שהרכיב השלישי של נורמל היחידה חיובי.

שאלה 5 (25 נקודות)

הוכיחו שהקבוצה $\left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 = y, z = x^2 + y^2 \right\}$ היא תמונת לולאה סדירה φ . הניחו

שהלולאה $([\varphi]_1, [\varphi]_2)$ היא שפתה של קבוצה סגורה וחסומה השוכנת לשמאלה של הלולאה,

$$\oint_{\varphi} 2zdx + 3xdy + 5ydz$$

וחשבו בעזרת משפט סטוקס-קלווין את האינטגרל:

▶▶▶ סוף המטלה