

# מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3  
 חומר הלימוד למטלה: פרק 10  
 מספר השאלות: 5  
 סמסטר: 2020  
 משקל המטלה: 5 נקודות  
 מועד אחרון להגשה: 26.6.2020

|                                                                                                                                                                                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).</li> <li>באמצעות מערכת המטלות המקוונת.</li> </ul> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## שאלה 1 (5 נקודות)

תהי  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  שגזירה פעמיים בנקודה  $a$ . הוכיחו ש- $\nabla \cdot \nabla f(a) = \text{tr } Hf(a)$ .

## שאלה 2 (25 נקודות)

יהי  $k \geq 2$ . תהי  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה הרמונית ב- $\mathbb{R}^k$ , דהיינו גזירה פעמיים ברציפות ומתקיים

$$\text{tr } Hf(a) = 0 \quad \text{לכל } a \in \mathbb{R}^k.$$

הוכיחו שהקבוצה

$$\left\{ (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid (x_1^{2019}, \dots, x_k^{2019}) \cdot \nabla f(x_1, \dots, x_k) = 0 \right\}$$

אינה חסומה. עצה: היעזרו בקבוצה  $\left\{ (x_1, \dots, x_k) \mid x_1^{2020} + \dots + x_k^{2020} \leq C \right\}$  עם קבוע כלשהו  $C$  ובמשפט הדיברגנץ.

## שאלה 3 (20 נקודות)

יהי  $k \geq 2$ . תהי  $K$  קבוצה סגורה, חסומה ובעלת נפח ב- $\mathbb{R}^k$ , ששפתה  $\partial K$  היא משטח על חלק

$$\text{vol}_k(K) = \frac{1}{k} \int_{\partial K} x \cdot N(x) d\sigma_{k-1} \quad \text{ומתקיים } \partial(K \setminus \partial K) = \partial K. \quad \text{הוכיחו כי}$$

כאשר  $N: \partial K \rightarrow \mathbb{R}^k$  הוא נורמל יחידה למשטח על  $\partial K$  הפונה החוצה מהקבוצה  $K$ .

## שאלה 4 (25 נקודות)

$$\text{חשבו את} \quad \iint_S (2x + 3y^2 + e^z) dy \wedge dz - (\sin xz + y + 4z^5) dx \wedge dz + ((x+y)^2 - z) dx \wedge dy$$

$$\text{כאשר} \quad S = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq \pi^2, z = \cos \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

הוא משטח עם אוריינטציה שנקבעת כך שהרכיב השלישי של נורמל היחידה חיובי.

## שאלה 5 (25 נקודות)

הוכיחו שהקבוצה  $\left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 = y, z = x^2 + y^2 \right\}$  היא תמונת לולאה סדירה  $\varphi$ . הניחו

שהלולאה  $([\varphi]_1, [\varphi]_2)$  היא שפתה של קבוצה סגורה וחסומה השוכנת לשמאלה של הלולאה,

$$\oint_{\varphi} 2zdx + 3xdy + 5ydz \quad \text{וחשבו בעזרת משפט סטוקס-קלווין את האינטגרל:}$$

▶▶▶ סוף המטלה

## הערות

לשאלה 1: קל ביותר: הבנת הנקרא.

לשאלה 2: 2019ב\174 בשינוי מימד.

לשאלה 3: בקורס הישן זה היה דוגמה בספר. ניסוח השאלה עוקב אחר ניסוח משפט הדיברגנץ בספר.

לשאלה 4: 2017ב\173, בשינוי נוסח (אינטגרל של תבנית ממעלה 2).

לשאלה 5: 2019ב\172, בשינוי נוסח קל.