

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
חומר הלימוד למטלה: פרק 9
מספר השאלות: 5
מועד אחרון להגשה: 10.6.2020
משקל המטלה: 6 נקודות
סמסטר: 2020

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $A \subseteq (0, \infty)$. תהי $B = \bigcup_{r \in A} S^{k-1}(0^{[k]}, r)$. הוכיחו כי אם A קבוצה צנומה אז B קבוצה צנומה.
(רשות ולא להגשה: האם הטענה ההפוכה נכונה?)

שאלה 2 (20 נקודות)

חשבו את האינטגרל המרובה:
$$\int_{[0,1]^k} \min\{x_1, \dots, x_k\} dx_1 \cdots dx_k$$

שאלה 3 (20 נקודות)

חשבו את הנפח והמרכז הגיאומטרי של הקבוצה:
$$\{(x, y, z) \mid x^2 e^{-2z} + y^2 e^{2z} \leq \sin z, 0 \leq z \leq \pi\}$$

שאלה 4 (20 נקודות)

הוכיחו כי $f(x) = e^{\lfloor \ln|x| \rfloor}$ אינטגרלית בקבוצה $A = B^k(0,1) \setminus \{0\}$ וחשבו את האינטגרל $\int_A f$.

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $D = \{(x, y) \mid x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$. תהי φ לולאה פשוטה סדירה שתמונתה היא השפה של קבוצה סגורה וחסומה A השוכנת לשמאל הלולאה φ , כך שראשית הצירים היא נקודה פנימית של A . הוכיחו כי:

$$\text{vol}_2(D) = \frac{1}{2} \oint_{\varphi} \frac{xdy - ydx}{x^2 + xy + y^2}$$

רמז: ראשית הראו שהנוסחה נכונה בהנחה ש- $A = D$. אחרי כן הראו שהיא נכונה גם ללא הנחה זאת.

►►► סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: די להוכיח את הטענה עבור A חסומה כי אם $A_n = A \cap (0, n)$ ו- B_n בהתאם אז

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

מכסים את A_n באיחוד בן מניה של קטעים שסכום אורכיהם קטן מ- ε . אם I הוא אחד

מהם אפשר להניח שהוא מוכל ב- $[0, n]$ ואז $B_I = \bigcup_{r \in I} S^{k-1}(0^{[k]}, r)$ היא קבוצה בעלת

נפח שחסום על ידי גודל פרופורציוני לאורך של I כלומר $\text{vol}_k(B_I) \leq \sigma \cdot \text{vol}_1(I)$ עם σ

מתאים, שאפשר למצוא. בעזרת סכום עליון מתאים של הפונקציה χ_{B_I} בתיבה $[0, n]^k$

אפשר לקבל אוסף תיבות מיושרות שסכום נפחיהם קטן מ- $\mu \sigma \cdot \text{vol}_1(I)$ עם $\mu \cdot \text{vol}_k(B_I) = \mu \sigma \cdot \text{vol}_1(I)$

עם $\mu > 1$ כלשהו. אז קיבלנו ביחד כיסוי של B_n באיחוד תיבות מיושרות שסכום

נפחיהן קטן מ- $\mu \sigma \varepsilon$ וזה מספיק כדי לקבוע ש- B_n צנומה.

הכיוון ההפוך כנראה נכון ולא קל.

לשאלה 2: מסמנים: $K_j = \{(x_1, \dots, x_k) \in [0, 1]^k \mid \forall i, x_j < x_i\}$

אז $K_1, \dots, K_k$ זרות זו לזו ו- $K \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_k)$ בעלת נפח אפס כי היא מוכלת באיחוד

מישוריעל מהצורה $x_i = x_j$. מטעמי סימטריה האינטגרלים על הקבוצות K_j שווים זה

$$\int_{[0,1]^k} \min\{x_1, \dots, x_k\} dx_1 \cdots dx_k = k \int_{K_k} x_k dx_1 \cdots dx_k$$

עכשיו אפשר להשתמש בגרסה המתאימה של משפט פוביני ולקבל:

$$\begin{aligned} \int_{K_k} x_k dx_1 \cdots dx_k &= \int_0^1 x_k \left(\int_{[x_k, 1]^{k-1}} dx_1 \cdots dx_{k-1} \right) dx_k = \int_0^1 x_k \text{vol}_{k-1}([x_k, 1]^{k-1}) dx_k = \\ &= \int_0^1 x_k (1-x_k)^{k-1} dx_k = \int_0^1 t^{k-1} (1-t) dt = \int_0^1 (t^{k-1} - t^k) dt = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

לשאלה 3: 2013\16\5.

לשאלה 4: על-פי 2016\15\4. צריך להראות שקבוצת נקודות האירציפות צנומה, והיא אכן כזאת

כאיחוד בן-מניה של ספירות. את ערך האינטגרל מקבלים על ידי סדרת טבעות שעולה

לקבוצה, והוא מתקבל כסכום של טור.

לשאלה 5: על פי 2018\16\1. הניסוח בכוונה עוקב מילה במילה אחרי שאלה 22.ט.9 בספר.