

①

ראשית נניח ש $\mathbb{R}^k$ הוא המרחב הממשי A קבוצת חסומה

אם נכתוב $B_n = \bigcup_{r \in A \cap [0, n]} S^{k-1}(0, r)$ וכן $A \cap [0, n]$

קנינו חסומה B_n (מחומה A) שכן B_n נחמק וזכר n

$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ נחמק, L כושרת q, h, b

אם $A \subseteq [0, R]$ נחמק A - A נחמק A - A נחמק

אם $\sum_{n=1}^{\infty} Vol_k(A_n) < \infty$ $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ כש A_n נחמק A_n נחמק A_n נחמק

$B_n = \bigcup_{r \in A \cap [0, n]} S^{k-1}(0, r)$ וכן B_n נחמק B_n נחמק B_n נחמק

$A = A \cap [0, R] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap [0, R]$ $A_n \subseteq [0, R]$ נחמק A_n נחמק A_n נחמק

אם $A_n \cap [0, R]$ נחמק A_n נחמק A_n נחמק A_n נחמק

$B_n = \bigcup_{r \in A_n} S^{k-1}(0, r) = \bar{B}^k(0, R_n) \setminus B^k(0, \alpha_n)$ $A_n = [\alpha_n, R_n]$ וכן A_n נחמק A_n נחמק A_n נחמק

$Vol_k(B(a; \rho)) = \sigma \cdot \rho^k$ $\sigma = \frac{2\pi^{k/2}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)} > 0$ וכן $Vol_k(B(a; \rho)) = \sigma \cdot \rho^k$ וכן $Vol_k(B(a; \rho)) = \sigma \cdot \rho^k$

$Vol_k(B_n) = Vol_k(\bar{B}^k(0; R_n) - Vol_k(B^k(0; \alpha_n)) = \sigma R_n^k - \sigma \alpha_n^k = \sigma (R_n^k - \alpha_n^k)$ וכן $Vol_k(B_n) = \sigma (R_n^k - \alpha_n^k)$

$f(B) - f(\alpha) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\xi) = k \xi^{k-1} \leq k R^{k-1} \Rightarrow f(\beta) - f(\alpha) \leq k R^{k-1} (\beta - \alpha)$ וכן $f(B) - f(\alpha) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\xi) = k \xi^{k-1} \leq k R^{k-1} \Rightarrow f(\beta) - f(\alpha) \leq k R^{k-1} (\beta - \alpha)$

$Vol_k(B_n) = \sigma (R_n^k - \alpha_n^k) \leq \sigma \cdot k R^{k-1} (R_n - \alpha_n) = \tau \cdot Vol_1(A_n)$ וכן $Vol_k(B_n) = \sigma (R_n^k - \alpha_n^k) \leq \sigma \cdot k R^{k-1} (R_n - \alpha_n) = \tau \cdot Vol_1(A_n)$

$Vol_k(B_n) = \int_K \chi_{B_n} \leq \tau Vol_1(A_n) < 2\tau Vol_1(A_n)$ וכן $Vol_k(B_n) = \int_K \chi_{B_n} \leq \tau Vol_1(A_n) < 2\tau Vol_1(A_n)$

אם χ_{B_n} נחמק χ_{B_n} נחמק χ_{B_n} נחמק χ_{B_n} נחמק

$\bar{S}_p(\chi_{B_n}) = \sum_{\Gamma \in P_n} \int_{\Gamma} \chi_{B_n} \cdot Vol_k \Gamma = \sum_{\Gamma \in P_n} Vol_k(\Gamma) = \sum_{\Gamma \in P_n} Vol_k(\Gamma)$ וכן $\bar{S}_p(\chi_{B_n}) = \sum_{\Gamma \in P_n} \int_{\Gamma} \chi_{B_n} \cdot Vol_k \Gamma = \sum_{\Gamma \in P_n} Vol_k(\Gamma) = \sum_{\Gamma \in P_n} Vol_k(\Gamma)$

$\sum_{\Gamma \in A_n} Vol_k(\Gamma) < 2\tau Vol_1(A_n) - 1$ $B_n \subseteq \bigcup_{\Gamma \in A_n} \Gamma$ וכן $\sum_{\Gamma \in A_n} Vol_k(\Gamma) < 2\tau Vol_1(A_n) - 1$

אם $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ Ω_n נחמק Ω_n נחמק Ω_n נחמק Ω_n נחמק

$\sum_{\Gamma \in P} Vol_k(\Gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\Gamma \in P_n} Vol_k(\Gamma) < \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau Vol_1(A_n) = 2\tau \sum_{n=1}^{\infty} Vol_1(A_n) = 2\tau \sum_{n=1}^{\infty} Vol_1(A_n)$ וכן $\sum_{\Gamma \in P} Vol_k(\Gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\Gamma \in P_n} Vol_k(\Gamma) < \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau Vol_1(A_n) = 2\tau \sum_{n=1}^{\infty} Vol_1(A_n) = 2\tau \sum_{n=1}^{\infty} Vol_1(A_n)$

2) $K_j = \{(x_1, \dots, x_k) \in [0,1]^k \mid x_j < x_i; i \neq j\}$; מכיל נקודה

$T_{[0,1]^k}^k((u_1, \dots, u_k)) \subseteq [0,1]^k \cap \bigcup_{1 \leq i < j \leq k} \{(x_1, \dots, x_k) \mid x_i = x_j\}$. כל

הקבוצה באמצעות מילת המידע כי כל נקודה היא נקודה רגילה

היא גם סגורה ומועבר אליו בעלת נפח 0. כל
השכבה של K_j מילת באיחור מילת-ה (המוטות $x_j > x_i$ או $x_j \neq i$ ו $x_i = 0$ ו $x_i = 1$)
הוא גם נקודה רגילה, ו- K_j חסומה, ולכן K_j בעלת נפח.

כל f רציפה ב $[0,1]^k$ מתקיים :

$$\int_{[0,1]^k} f = \sum_{i=1}^k \int_{K_i} f$$

אם φ_i הוא הטנגנט במסלול $x_j = x_i$ - צפייה

$(x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_i, \dots, x_k)$

הוא רציף, והעקבה הסגורה מילתה את מילתה החד-חדית, ולכן הוא מילתה את המילתה

והמילתה : $[\varphi(x_1, \dots, x_k)]_m = \begin{cases} x_j & m=j \\ x_i & m=i \\ x_m & m \neq i, j \end{cases}$

כל : $J\varphi$ - מילתה מילתה מילתה מילתה J_{x_k} מילתה מילתה מילתה J -

כל $\det J = -1$. כלומר בבירור $\varphi_i^*(u_1, \dots, u_k) = K_j$

נמצא : $f \circ \varphi_i = f$ כל $f = \min\{x_1, \dots, x_k\}$. כל בבירור

כל $\int_{K_i} f = \int_{[0,1]^k} f \circ \varphi_i = \int_{[0,1]^k} f$; כל $i=1, \dots, k$

כל $\int_{[0,1]^k} f = \sum_{i=1}^k \int_{K_i} f = k \cdot \int_{[0,1]^k} f = k \cdot \int_{[0,1]^k} x_k dx_1 \dots dx_{k-1}$; כל

~~מילתה מילתה מילתה מילתה מילתה מילתה מילתה מילתה מילתה מילתה~~

$\int_{K_k} x_k dx_1 \dots dx_{k-1} = \int_0^1 \left(\int_{[x_k, 1]^{k-1}} x_k dx_1 \dots dx_{k-1} \right) dx_k = \int_0^1 x_k \text{Vol}_{k-1}([x_k, 1]^{k-1}) dx_k$

$= \int_0^1 x_k (1-x_k)^{k-1} dx_k = \int_0^1 (t-t)^{k-1} dt = \int_0^1 (t^{k-1} - t^{k-1}) dt = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$\begin{matrix} t=1-x_k \\ dt=-dx_k \end{matrix}$

$\int_{[0,1]^k} f = k \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{k}{k+1} = \frac{k+1-k}{k+1} = \frac{1}{k+1}$; כל

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 e^{-2z} + y^2 e^{2z} \leq \sin z\} \quad (3)$$

נסמן (a, b, c) את הנקודה במרחב

~~$$\varphi: (x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$$~~

כלי טיפוס $\varphi(A)$ הוא $\varphi(a, b, c)$

$$\varphi(A) = A \quad \text{ולכן} \quad \varphi(a, b, c) = (a, b, c)$$

$$b=c=0 \Leftrightarrow (-a, -b, c) = (a, b, c)$$

כל הנקודה במרחב A היא מקבוק $(a, 0, 0)$ (כלומר נמצא z בלבד)

$$f: (x, y, z) \mapsto z \quad \text{ולכן נחשב} \quad \int_A f$$

$$C = \frac{\int_A z dx dy dz}{\text{Vol}_3(A)}$$

נרשם נקודה/נקודות:

$$\varphi^{-1}: (x, y, z) \mapsto (x e^z, y e^{-z}, z) \quad \varphi: (x, y, z) \mapsto (x e^{-z}, y e^z, z)$$

$$\det J\varphi = e^z \cdot e^z \cdot 1 = 1 \quad J\varphi = \begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & -x e^{-z} \\ 0 & e^z & y e^z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$ מכיל את הנקודה z, y, x

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A f \circ \varphi |\det J\varphi| = \int_A f \circ \varphi$$

$$\varphi(A) = \{(x e^z, y e^z, z) \mid (x e^z)^2 + (y e^z)^2 \leq \sin z\}$$

$$= \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq \sin z\}$$

$$K = \varphi(A) \quad \text{ולכן} \quad \int_A f \circ \varphi = \int_K f$$

$$\text{Vol}_3(A) = \int_A 1 dx dy dz = \int_B 1 dx dy dz = \text{Vol}_2(B)$$

$$\int_A z dx dy dz = \int_B z dx dy dz$$

$$B_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \sin z\} = \overline{B}^2(0, \sqrt{\sin z})$$

$$\text{Vol}_2(B_z) = \pi \cdot (\sqrt{\sin z})^2 = \pi \sin z$$

$$\text{Vol}_3 A = \text{Vol}_3 B = \int_0^{\pi} \text{Vol}_2(B_z) dz = \pi \int_0^{\pi} \sin z dz = \pi [-\cos z]_0^{\pi} = 2\pi$$

$$\int_A z dx dy dz = \int_B z dx dy dz = \int_0^{\pi} \left(\int_{B_z} z dx dy \right) dz = \int_0^{\pi} z \cdot \text{Vol}_2(B_z) dz = \pi \int_0^{\pi} z \sin z dz$$

$$= \pi [\sin z - z \cos z]_0^{\pi} = \pi (\pi - 0) = \pi^2$$

$$C = \frac{\int_A z dx dy dz}{\text{Vol}_3(A)} = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$C = \frac{\pi}{2}$$

(2) אם $0 < |x| < e^{-n+1}$ אז $|x| < e^{-n}$ ולכן $f(x) = e^{-n}$.
 אם $|x| > e^{-n}$ אז $f(x) = 0$.

כך בקלות נראה $B^k(0; e^{-n}) \setminus B^k(0; e^{-(n+1)}) \subset A_n$

לכל n נגד $x \in A_n$ אז $f(x) = e^{-n}$.
 אם $x \in A_n$ אז $f(x) = e^{-n}$.

אם $x \in A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ אז $x = 0$ ולכן $f(x) = 1$.

לכן f מתחלפת ב-0 על $S^k(0; e^{-n})$ וקבוצה זו

היא צפופה ב-0 ולכן f מתחלפת ב-0 על $S^k(0; e^{-n})$ וקבוצה זו

$A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S^k(0; e^{-n})$

ולכן מתקנה 9.7.6. אם $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ אז

$f|_A \in C^k(A)$ (כאן $f|_A$ היא פונקציה) וכן $f|_A \in C^k(A)$

אם $f|_A \in C^k(A)$ אז $f|_A \in C^k(A)$

לכן $f|_A \in C^k(A)$ וכן $f|_A \in C^k(A)$

אם $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ אז $f|_A \in C^k(A)$

אם $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ אז $f|_A \in C^k(A)$

$\int_A f = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} f \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} f = \int_A f$

$\int_{A_j} f = \int_{A_j} e^{-j} = e^{-j} \text{Vol}_k(A_j) = e^{-j} (\text{Vol}_k(B^k(0; e^{-j})) - \text{Vol}_k(B^k(0; e^{-(j+1)})))$

אם $\sigma = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2+1)}$ אז $\text{Vol}_k(B^k(0; \rho)) = \sigma \rho^k$

$\int_{A_j} f = e^{-j} \sigma (e^{-j(k/2)} - e^{-(j+1)(k/2)}) = e^{-j} \sigma (e^{-j(k/2)} - e^{-(j+1)(k/2)})$

$\int_A f = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j(k/2)} \sigma (e^{-j(k/2)} - e^{-(j+1)(k/2)}) = \sigma (e^{-(k/2)} - 1)$

$= \sigma (e^{-(k/2)} - 1) \frac{1}{e^{-(k/2)} - 1} = \frac{1}{e^{-(k/2)} - 1}$

אם $k=1$ אז $\sigma = \pi$ וכן $\int_A f = \frac{1}{e^{-1/2} - 1}$

אם $k=2$ אז $\sigma = \pi$ וכן $\int_A f = \frac{1}{e^{-1} - 1}$

5

השטח D הוא $D = \{(x,y) \mid x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$: פתור, ψ ופונקציה

$$\int_{\psi} \frac{x dy - y dx}{x^2 + xy + y^2} = \int_{\psi} x dy - y dx = \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial (-y)}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 2 dx dy = 2 \text{Vol}_2(D)$$

(המשפט של גרין)

$$\int_{\psi} p dx + q dy = 2 \text{Vol}_2(D) \quad \text{ראינו ש} \quad p = \frac{-y}{x^2 + xy + y^2}, \quad q = \frac{x}{x^2 + xy + y^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{(x^2 + xy + y^2) \cdot (-1) - (-y)(x + y)}{(x^2 + xy + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + xy + y^2)^2} \\ \frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{(x^2 + xy + y^2) \cdot 1 - x(x + y)}{(x^2 + xy + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + xy + y^2)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$$

אם (p, q) היא פונקציה בדיפרנציאל $\omega = p dx + q dy$ אז $\int_{\psi} \omega = 2 \text{Vol}_2(D)$

אם ψ היא סגורה אז $\int_{\psi} \omega = 0$ (משפט של גרין) $\Rightarrow \int_{\psi} \omega = 0$ $\Rightarrow \int_{\psi} p dx + q dy = 0$ $\Rightarrow \int_{\psi} \frac{x dy - y dx}{x^2 + xy + y^2} = 0$

$$\int_{\psi} p dx + q dy = \int_{\psi} \frac{x dy - y dx}{x^2 + xy + y^2} = 0$$

$$\frac{1}{2} \int_{\psi} \frac{x dy - y dx}{x^2 + xy + y^2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \text{Vol}_2(D) = \text{Vol}_2(D)$$

אם D הוא אזור הנמצא בתוך $\{(x,y) \mid x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$ וזוהי D אז $\int_{\psi} \omega = 2 \text{Vol}_2(D)$

הקבוצה $\{(x,y) \mid x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$ היא אזור הנמצא בתוך D וזוהי D

$$D \subseteq \{(x,y) \mid x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$$

אם $(x,y) \in D$ אז $x^2 + xy + y^2 \leq 1$ וזוהי D

אם $(x,y) \in D$ אז $x^2 + xy + y^2 \leq 1$ וזוהי D

אם $(x,y) \in D$ אז $x^2 + xy + y^2 \leq 1$ וזוהי D

$$1 = x^2 + xy + y^2 = r^2 (\cos^2 t + \cos t \sin t + \sin^2 t) = r^2 (1 + \frac{1}{2} \sin 2t)$$

$$(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin 2t}} (\cos t, \sin t) \quad r = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin 2t}}$$

$$\psi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin 2t}} (\cos t, \sin t)$$