

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 סמסטר: 2020
 חומר הלימוד למטלה: פרק 8
 משקל המטלה: 5 נקודות
 מספר השאלות: 5
 מועד אחרון להגשה: 19.5.2020

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ו- $\psi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ מסילות שאורכן סופי. תהי: $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $t \mapsto \varphi(t) \times \psi(t)$

א. הוכיחו כי γ היא מסילה שאורכה סופי. (מומלץ להיעזר במגוון משפטים).

ב. אם φ ו- ψ הן מסילות סדירות, האם גם γ היא מסילה סדירה?

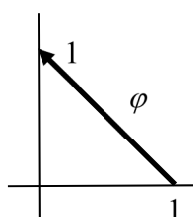
שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ מסילה שאורכה סופי.

א. הראו שאם φ היא מסילה פשוטה, לולאה פשוטה או מסילה סדירה, אז יש מספר חיובי γ ומסילה יחידה $\psi: [0, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}^k$ ששקולה ל- φ ובעלת התכונה: $L(\psi|_{[0,s]}) = s$ לכל $s \in (0, \gamma]$.

ב. הוכיחו כי אם $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בתמונת המסילה φ אז: $\int_{\varphi} f(x) |dx| = \int_0^{\gamma} f(\psi(s)) ds$

שאלה 3 (20 נקודות)



חשבו את האינטגרל של התבנית $\frac{x^3}{(x^2 + y^2)^3} dx + \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^3} dy$ על המסילה שבאיור:
 (מומלץ להיעזר בשאלה 21.8 ו-21.9 נוספות שמוכחות בספר הלימוד).

שאלה 4 (20 נקודות)

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

הראו כי הפונקציה

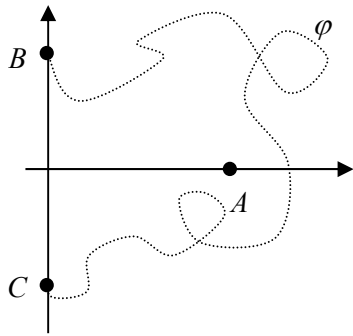
$$(x, y) \mapsto \frac{e^x}{x^2 + y^2} (x \sin y - y \cos y, y \sin y + x \cos y)$$

$$U = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 > 100 \}$$

אינה שדה משמר בקבוצה :

המלצה: ראשית כדאי להראות שהפונקציה היא שדה משמר בכל קבוצה פתוחה ופשוטת-קשר בה היא מוגדרת.

שאלה 5 (20 נקודות)



יהיו a ו- b מספרים חיוביים כך שהנקודות $A = (a, 0)$,

$B = (0, b)$ ו- $C = (0, -b)$ הן קודקודי משולש שווה-צלעות.

φ היא מסילה מ- B ל- C שאורכה סופי המתוארת באיור:

$$P(x, y) = \frac{-y}{(x-a)^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2}$$

נתונות

$$\int_{\varphi} Pdx + Qdy$$

חשבו את האינטגרל

(קבלו תוצאה מספרית, שאינה תלויה במספרים a ו- b). פרטו ונמקו היטב את כל שיקוליכם!

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: דומה לשאלת ממ"ח מהעבר. אפשר להוכיח ישירות מההגדרה. אפשר להשתמש באפיון של זיורדן להשתנות חסומה של רכיבי המסילה. וכמובן שהמכפלה אינה סדירה, למשל אם שני גורמי המכפלה זהים.

לשאלה 2: אורך מסילה פשוטה או לולאה פשוטה או מסילה סדירה הוא חיובי. מזה אפשר להסיק שהפונקציה Λ_φ מטענה 30.ב.8 (ושאלה 29.ב.8) עולה במובן הצר. כמובן היא רציפה, ותמונתה $[0, \gamma]$ עבור $\gamma = L(\varphi) > 0$. אפשר עכשיו לבדוק שהמסילה $\psi = \varphi \circ \Lambda_\varphi^{-1}$ היא בעלת התכונות המבוקשות. כמובן אם $\varphi = \psi \circ \tau$ בעלת התכונות המבוקשות, כאשר $\tau: [\alpha, \beta] \rightarrow [0, \gamma]$ פונקציה רציפה ועולה במובן הצר, אז אפשר להסיק ש- $\tau = \Lambda_\varphi$, ומכאן יחידות ψ .
לסעיף ב, מקבלים ממשפט 32.ב.8 נוסחה ל- Λ_φ שאותה גוזרים ומקבלים שהנגזרת היא $\dot{\varphi}$. מכלל השרשרת מקבלים $|\dot{\psi}| = 1$, ומשתמשים בטענה 9.ה.8 ומשפט 21.ה.8. טענת סעיף ב כנראה נכונה גם למסילה או לולאה פשוטה שאינה סדירה (ואורכה סופי).

לשאלה 3: לפי ממ"ח 10\03\2019. הרעיון הוא שמסימטריה האינטגרל הוא 0 (היפוך מגמת המסילה נותן אותו אינטגרל, לפי שאלה 21.ו.8 עם $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$) (החלפת תפקידים בין שני המשתנים). אפשר גם לקחת $\varphi: [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbf{R}^2$ שמוגדרת כך: $\varphi(t) = (\frac{1}{2} - t, \frac{1}{2} + t)$ ולקבל ממשפט 24.ו.8 אינטגרל של פונקציה איזוגית על קטע סימטרי.

לשאלה 4: לפי 2\16\2015.
לא קשה לבדוק שמטריצת היעקוביאן סימטרית ומכאן ההמלצה בשאלה.
לא קשה לבדוק בעזרת משפט 24.ו.8 שעל מעגל היחידה האינטגרל חיובי.
מכאן אפשר לקבל בעזרת חיתוכים ושרשורים של מסילות שכך גם על מעגל ברדיוס גדול מ-10.

לשאלה 5: 3\16\2017 (ככתבה וכלשונה, למעט "אורכה סופי" במקום "בעלת אורך").