

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 חומר הלימוד למטלה: פרקים 4–7
 מספר השאלות: 6
 סמסטר: 2020
 משקל המטלה: 5 נקודות
 מועד אחרון להגשה: 6.5.2020

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (17 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות ב- $\mathbb{R}^3$. נניח שלכל $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ מתקיים

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{השוויון} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) \quad \text{נגדיר פונקציה:}$$

$$(x, y) \mapsto \int_0^y f(x, y-z, z) dz$$

הוכיחו שלכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ מתקיים:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + f(x, 0, y)$$

שאלה 2 (17 נקודות)

א. הראו שהפונקציה f משאלה 2 בממ"ן 11 גזירה ברציפות בקבוצה $A \setminus \partial A$.

ב. הראו שהטלאי מסעיף ג של שאלה 2 בממ"ן 11 הוא טלאי חלק.

שאלה 3 (17 נקודות)

הראו שהקבוצה

$$S = \left\{ (x, y, z) \mid \begin{cases} \sin x + \cos y + \tan z = 1 \\ \cos x + \tan y + \sin z = 1 \end{cases} \right\}$$

היא יריעה חלקה חד-ממדית, ומצאו את הישר המשיק לה בנקודה $(0, 0, 0)$.

שאלה 4 (12 נקודות)

תהינה $f, g, h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות חלקיות שמוגדרות וגזירות ברציפות בקבוצה פתוחה U .

הוכיחו שאם a היא נקודת קיצון של f בקבוצה $\{x \in U \mid g(x) = h(x) = 0\}$ אז הוקטור $\nabla f(a)$ ניצב לוקטור $\nabla g(a) \times \nabla h(a)$.

שאלה 5 (17 נקודות)

הוכיחו שהקבוצה $\{A + A^2 \mid A \in M_{k \times k}(\mathbb{R})\}$ מכילה סביבה של 0.

שאלה 6 (20 נקודות)

מצאו את כל נקודות הקיצון וערכי הקיצון של הפונקציה

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in (0, \infty)^4 \mid \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 9 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 2 \end{array} \right\} \quad \text{בקבוצה:}$$

שימו לב: אם אין מינימום או מקסימום עליכם להוכיח שאין. אם יש עליכם להוכיח שיש, ולמצוא אותם במפורש.

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: 1\15\2019 בשינוי סימונים (עקרון דוהמל למשוואת החום).

לשאלה 2: המשך לשאלה ממ"ן 11.

לשאלה 3: מבוסס על 4\14\2016.

לשאלה 4: 4\14\2019.

לשאלה 5: על פי שאלה 6 מ-TAU2017. זה נובע ממשפט הפונקציה ההופכית עבור הפונקציה

$$f: M_{k \times k}(\mathbf{R}) \rightarrow M_{k \times k}(\mathbf{R}) \text{ שמוגדרת על ידי } A \mapsto A + A^2. \text{ צריך כאן בעיקר לזהות}$$

שתחת הזיהוי של $M_{k \times k}(\mathbf{R})$ עם $\mathbf{R}^{k^2}$ מתקיים $Jf_0 = I_{k^2}$. אפשר לחשב נגזרות חלקיות

$\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}(0)$ או שאפשר להוכיח ש- Df_0 היא העתקת הזהות של $M_{k \times k}(\mathbf{R})$ ישירות מהגדרת

$$\frac{A^2}{|A|} \xrightarrow{A \rightarrow 0} 0 \text{ כלומר להראות ש-}$$

לשאלה 6: הקבוצה סגורה וחסומה כי היא:

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \left[\frac{1}{2}, \infty \right)^4 \mid \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 9 \\ x_2 x_3 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_3 = 2x_1 x_2 x_3 x_4 \end{array} \right\}$$

הנקודות החשודות מתקבלות מכופלי לגרנז' והן התמורות של:

$$(2, 2, 2, 2), (3, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}), \left(\frac{13 \pm \sqrt{7}}{6}, \frac{13 \pm \sqrt{7}}{6}, \frac{13 \pm \sqrt{7}}{6}, \frac{5 \mp \sqrt{7}}{2} \right)$$