

① נתוני הטבלה הם:  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}^2$  וכן  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ :  
 $g(x,y) = \int_0^y f(x, y-z, z) dz$

נחשב עבור  $g$  קבוצה:  
 $h(z,t) = f(t, y-z, z)$   
 $H(t) = \int_0^y h(z,t) dz = \int_0^y f(t, y-z, z) dz = g(t, y)$

מכאן  $f$  היא פונקציה רציפה ונוצר טעות גם כרובג ולכן  $h$  רציפה ב- $\mathbb{R}^2$ .  
 מאכן  $g$  פונקציה רציפה  $(t,y) \in \mathbb{R}^2$   $\int \frac{\partial h}{\partial t}(z,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, y-z, z)$   
 וזהו כותב כי  $f$  היא פונקציה רציפה:

לכן ממשל 4.2.4 נוסק כי  
 $H'(t) = \int_0^y \frac{\partial h}{\partial t}(z,t) dz$

כעת, במידה,  $\frac{\partial h}{\partial t}(z,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, y-z, z)$   
 $H'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(t, y)$

$\frac{\partial g}{\partial x}(t, y) = \int_0^y \frac{\partial h}{\partial x}(z,t) dz = \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(t, y-z, z) dz$

לכן  $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y-z, z) dz$

המשפט 4.2.4 יעיל גם מלבד  $[a,b] \times [c,d]$  עבור  $a < b$  ו- $c < d$   
 במקרה זה  $t \in [a,b]$  ו- $y \in [c,d]$  ו- $z \in [c,d]$

במקרה זה  $[a,b] \times [c,d]$  הוא תחום גאומטרי ו- $f$  רציפה ו- $\frac{\partial f}{\partial x}$  רציפה  
 ולכן  $0 = a < b = y$  ולכן הקואורנטים  $x, y, z$  הם  $0 < x < y$ .

נראה כי  $f$  היא פונקציה רציפה  $x \leq y$ .

~~המשפט 4.2.4 מתקבל~~  
 נשתמש במשפט 4.2.4 מתקבל

נניח:  $\alpha(t) = 0$  ו- $\beta(t) = y$  כיוון קבוע (ולכן  $\alpha'(t) = \beta'(t) = 0$  לכל  $t$ )  
 נבחר קבוצה  $(a,b)$  שמכילה את  $0$  ו- $y$ , וכן  $[c,d]$  (שכאן  $f$  רציפה ו- $\frac{\partial f}{\partial x}$  רציפה)  
 נקבל ממשל 4.2.4:  
 $H'(t) = h(\beta(t), t) \cdot \beta'(t) - h(\alpha(t), t) \cdot \alpha'(t) = \int_0^y \frac{\partial h}{\partial t}(z,t) dz = \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(t, y-z, z) dz$

לכן  $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y-z, z) dz$  לכל  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

נשכח את  $h$  ו- $H$  ונחזור להוכיח, ונראה כי  $\frac{\partial h}{\partial t}(z,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, y-z, z)$

$h(z,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, y-z, z) \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t}(z,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, y-z, z)$   
 $H(t) = \int_0^y h(z,t) dz = \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(t, y-z, z) dz = \frac{\partial g}{\partial x}(t, y)$

לכן  $\frac{\partial g}{\partial x}(t, y) = H'(t) = \int_0^y \frac{\partial h}{\partial t}(z,t) dz = \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, y-z, z) dz$  וזהו כותב כי  $f$  היא פונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}^2$  ו- $\frac{\partial f}{\partial x}$  רציפה ב- $\mathbb{R}^2$  ו- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  רציפה ב- $\mathbb{R}^2$ .

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y-z,z) dz$$

סבן: אם  $(x,y) \in \Omega$  מתקיים

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y-z,z) dz$$

סכנון מובל נשמר מתחתיות ה-1 וה-2 שתי כוחות  
סכנון הכוללת שמתחת: סכנון א קבוע

$$h(z,t) = f(x,t-z,z)$$

$$H(t) = \int_0^t h(z,t) = \int_0^t f(x,t-z,z) dz = g(x,t)$$

מחזורים - f קבוע ברמות, אם ה קבוע ברמות, אז  $\int \int$  הסוגיות

$$\frac{\partial h}{\partial t}(z,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,t-z,z)$$

ממשיך א.ב.3 או  $\alpha(t)=0$   $\beta(t)=t$

$$\begin{aligned} H'(t) &= h(\beta(t),t) \cdot \beta'(t) - h(\alpha(t),t) \cdot \alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial h}{\partial t}(z,t) dz \\ &= h(t,t) \cdot 1 - h(0,t) \cdot 0 + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(x,t-z,z) dz \\ &= f(x,t-t,t) - 0 + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(x,t-z,z) dz \end{aligned}$$

אם  $t=g$  אז  $t=g$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,g) = H'(g) = f(x,0,g) + \int_0^g \frac{\partial f}{\partial y}(x,g-z,z) dz = f(x,0,g) + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)$$

~~החלק הזה נמחק~~  
סכנון קבוע

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{לפי כוחות} \quad F(x,y,z) = xe^z + ye^z + ze^z$$

(2) (10)

הכוחות ממוצע 2 בממ"מ 11.  $d=2, r=1$

הכוחות ממוצע 2 בממ"מ 11.  $d=2, r=1$

הכוחות ממוצע 2 בממ"מ 11.  $d=2, r=1$

הכוחות ממוצע 2 בממ"מ 11.  $d=2, r=1$

הכוחות ממוצע 2 בממ"מ 11.  $d=2, r=1$

הכוחות ממוצע 2 בממ"מ 11.  $d=2, r=1$

הכוחות ממוצע 2 בממ"מ 11.  $d=2, r=1$

הכוחות ממוצע 2 בממ"מ 11.  $d=2, r=1$

(3)

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

נדבר

$$(x, y, z) \mapsto (\sin x + \cos y + \tan z, \cos x + \tan y + \sin z)$$

נסת בנקודה  $(0,0,0)$  בתחום הגדרה ונשתמש בנקודה הזו:

$$JF_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin y & \frac{1}{\cos^2 z} \\ -\sin x & \frac{1}{\cos^2 y} & \cos z \end{pmatrix}$$

אנחנו מחפשים את נקודת האפס:

$$\begin{pmatrix} -\sin y & \frac{1}{\cos^2 z} \\ \frac{1}{\cos^2 y} & \cos z \end{pmatrix}$$

אנחנו רוצים את הנקודה הזו:

$$-\sin y \cos z = \frac{1}{\cos^2 y \cos^2 z} \Leftrightarrow -\sin y \cos z = 1$$

נשים לב שהערות המכנה הן  $\pm 1$  ולכן נקבל:

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 2 \Leftrightarrow |\sin y| = 1 \text{ ו- } |\cos y| = 1$$

תחום הגדרה הוא קבוצת נתונים:  $(-\infty, \infty) \times (\pi - \frac{\pi}{2}, \pi + \frac{\pi}{2}) \times (\pi - \frac{\pi}{2}, \pi + \frac{\pi}{2})$

כאשר  $m, k \in \mathbb{Z}$ .  
 נגדיר  $S = \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = (1, 1)\}$   
 נגדיר  $a = (0, 0, 0)$  ונשים לב  $F(a) = (1, 1)$

$$T_0(S) = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u \cdot JF_0^T = 0\}$$

$$JF_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_0(S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0)\} = \{(x, y, z) \mid x+z=0, y+z=0\} = \{(-z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(-1, -1, 1)\}$$

$$0 + T_0(S) = T_0(S) = \text{span}\{(-1, -1, 1)\}$$

אם  $f$  מתה  $\nabla f(a) = 0$  ו-  $\nabla f(a) \neq 0$  אז  $f$  מקבלת ערך מקסימלי/מיני מקומי ב-  $a$ .  
 אם  $\nabla f(a) = 0$  ו-  $\nabla^2 f(a)$  אינו סימטרי אז  $a$  אינו נקודת קיצון.  
 אם  $\nabla f(a) = 0$  ו-  $\nabla^2 f(a)$  סימטרי ו-  $\det \nabla^2 f(a) > 0$  אז  $a$  נקודת קיצון מקומי.  
 אם  $\nabla f(a) = 0$  ו-  $\nabla^2 f(a)$  סימטרי ו-  $\det \nabla^2 f(a) < 0$  אז  $a$  אינו נקודת קיצון.

⑤

תהייה  $f$  פונקציה ב' צורה

$X = (x_{ij})$  ז'ען די ריכט טאבלע פאר א ווארענאנדער שטעלונג פון  $x_i$ .

המשפט -  $f$  היא פונקציה רגולרית -  $[f(x)]_{ij} = x_{ij} + \sum_{s=1}^k x_{is} x_{sj}$  56

$\text{max} + \text{בוא כיווץ}$   $s=1$  היה כולל ויחזיק את שית ולכן זהירות בפרטים

מכאן נובע כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \int_a^b f(x) dx$

$$\frac{\partial [f]_{ij}}{\partial x_{mn}} = \frac{\partial x_{ij}}{\partial x_{mn}} + \sum_{s=1}^K \left( \frac{\partial x_{is}}{\partial x_{mn}} \cdot x_{sj} + x_{is} \frac{\partial x_{sj}}{\partial x_{mn}} \right) = \delta_{in} \delta_{jn} + \sum_{s=1}^K (\delta_{in} \delta_{sn} x_{sj} + \delta_{sn} \delta_{jn} x_{is}) =$$

$$= d_{im} d_{jn} + d_{in} x_{nj} + d_{jn} x_{im} = \begin{cases} 1 + x_{nn} + x_{nn} & m=i, n=j \\ x_{nj} & m=i, n \neq j \\ x_{im} & m \neq i, n=j \\ 0 & m \neq i, n \neq j \end{cases} \quad \begin{matrix} \varepsilon=1 \\ \varepsilon=0 \end{matrix}$$

גברל - רחוק מ- $\frac{1}{2}$  מעורג תלבוה ברובות  $\frac{1}{2}$  וכן מעורג ברובות

גביש - רזומט ס - ת. מציג תוצאות בריבוי.  $\frac{\partial f}{\partial x_{mn}}(0) = d_{im} d_{jn}$  כחובות  
 $Jf_0 = I_{K^2}$  נאמר  
 $N$  - מרחב הירידה ב  $L^2 \times L^2$

$$D_{f_0} \leq J_{f_0}$$

לכן לפי משה הנוקריה (הובכר) (4.10.7) יש סיבה ש כולו כתוב ב  
כך ש - (ב) קבוצה נמוכה.

כג ו -  $f(b)$  קבוצת פתוח.

$f: M_{n \times n}(R) \rightarrow R$  defined by  $f(A) = \det(A)$  is a linear map.  $f(0) = 0$  and  $f(A+B) = f(A) + f(B)$ .

דרישה סדר העליון -  $Df_0$  הוא פונקציה בלתי- $M_{\text{Lip}}$  (2)  $M_{\text{Lip}}$ , ולכן הבינה,

ח/י וסו חמ זר ס"ק זשוחות מחברות (גמזר 1.1.3)

$$\frac{f(x) - f(0) - x}{|x|} = \frac{(x + x^2) - 0 - x}{|x|} = \frac{x^2}{|x|} = \frac{1}{|x|} \cdot x \cdot x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$Df_0(x) = x$

$$f(A+x) = (A+x) + (A+x)^2 = A + A^2 + x + Ax + xA + x^2; A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ or } \mathbb{C} : \text{not a scalar!}$$

~~$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$~~

$$\frac{f(1+x) - f(1) - (x + 1x + \frac{1}{2}x^2)}{1x} = \frac{x^2}{1x} = \frac{x}{1x} \cdot x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

כבר נתון  $x \mapsto x + Ax + xA$  בוא נראה  $\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{|x|} \cdot x \cdot x^{-1} = \frac{1}{|x|}$

(כאשר נשתמש בדמטר קוור)  $X = (x_1, \dots, x_n)$  (100)

$g: x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i$   
 $h: x \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$

$$A = \{x \in (0, \infty)^{\mathbb{N}} \mid g(x) \leq 9, h(x) = 2\} \subseteq [2, 9]^{\mathbb{N}} \quad \therefore \subseteq \mathbb{N}$$

[illegible]

$b-2$  מוביל  $h+g$  כל  $b \in [\frac{1}{2}, 9]^{k \cdot n/6}$

$$h(b) \neq 2 \quad \text{in} \quad g(b) > q \quad \text{p.d.} \quad b \in A$$

אם  $g(x) > q$  כל  $x$  ומה  $w = (q, 0)$  סביבה רחוקה  $g(x)$   
 וזהו  $U$ ;  $n$  על אחרונה 2, 2, 2,  $U$  סביבה  $U$  כל  $U$  שכל  $g(x)$ .  
 וכן  $U \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A \Rightarrow U \subseteq A^c$

סתירה  $h(b) \neq 2$  ולכן  $W = \mathbb{R} \cup \{2\}$  סבוכה סתומה  $\downarrow$   $b$   
 מכאן סכימטית  $h$  איננה 2.7.2. גם סבוכה  $U$   $h(b)$  ו-  $h(v) \in \bar{W}$   
 וכן  $U \subseteq \mathbb{R}^K \setminus A$   $U$  זירה  $A$

תשובה: נניח  $b \in \mathbb{R}^n$  גורם סביבה  $\bar{u}$  של  $A$  -  $\mathbb{R}^n$ . אז  $\mathbb{R}^n$  פתוח וליק  $A$  הוא

ה'תשנ"ו ט-א טאג אונטער + רבינו ב' ו'ט' ל'ט' אונטער (א.ד.ג.)

A מיליון / מיליון בקבוצה

נתון  $\mathcal{A}$  ו- $\mathcal{B}$  מרחבי מדידות. נרמק:

$$\mathcal{B} = \{x \in (0, \infty)^{\mathbb{N}} \mid g(x) < q, h(x) = 2\}$$

$$C = \{x \in (0, \infty)^2 \mid g(x) = 9, h(x) = 2\}$$

$f(a) = \max_{x \in A} f(x)$  תהי  $a \in A$  המקסימום של  $f$  על  $A$ .  $A = B \cup C$  ו  $f|_B = f|_C$

$$f(a) = \min f(A) \quad 110$$

$a \in C$  и  $a \in B$  30

$\min_{a \in B} f(a) = \max_{a \in B} f(a) = f(a)$

ברוכים הבאים,  $a \in C$  זה  $a$  נקודת קוויבן  $f$   $C$ -

נחמך ואל שני המקרים

אם  $a$  נקודת קיצון של  $f$  ב- $B$  : נסמן  $W = \{x \in (0, \infty)^k \mid g(x) < 9\}$

$W$  הוא קבוצת בתולה ל- $N$  מסתמך 23.3.2 ו-24.א.2

$a$  היא נקודת קיצון של  $f$  ב- $B$  :  $B = \{x \in W \mid h(x) = 2\}$

ל- $a$  היא נקודת קיצון מקומית של  $f$  תחת המילוי  $h=2$ .

$f$  ו- $g$  הם פונקציות ברירות ב- $\mathbb{R}^k$  ובכיוון בסביבת  $a$ .

לכן נשתמש ב-7.ה.11 ("כוחי/חלשים") בקבוצה  $\{ \nabla f(a), \nabla h(a) \}$  תלויים/תלומות.

נחשב  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_k = \frac{x_1 \cdots x_k}{x_i}$  ו-  $h(x) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{x_i}$

$\frac{\partial h}{\partial x_i} = -\frac{1}{x_i^2}$   $\nabla f = x_1 \cdots x_k \left( \frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_k} \right)$   
 $\nabla h = - \left( \frac{1}{x_1^2}, \dots, \frac{1}{x_k^2} \right)$

$\nabla f(a) = a_1 \cdots a_k \left( \frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_k} \right)$

$\nabla h(a) = - \left( \frac{1}{a_1^2}, \dots, \frac{1}{a_k^2} \right)$

$\nabla f(a)$  ו- $\nabla h(a)$  תלויים/תלומות ונניחם מנותנים 0-N

$\nabla f(a) = \lambda \nabla h(a)$  מכיוון קבוצת  $\lambda$  קטן

$a_1 \cdots a_k \left( \frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_k} \right) = \lambda \left( \frac{1}{a_1^2}, \dots, \frac{1}{a_k^2} \right)$

$a_1 = a_2 = \dots = a_k \iff a_i = \frac{-x}{a_1 \cdots a_k} \iff a_1 \cdots a_k \frac{1}{a_i} = -\frac{1}{a_i^2}$  ו-  $h$

~~$a_1 = a_2 = \dots = a_k$~~   $a_i = \frac{k}{2} = \frac{k}{a_i} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{a_j} = h(a) = 2$  כנראה

$f(a) = \left( \frac{k}{2} \right)^k$   $a = \left( \frac{2}{k}, \dots, \frac{2}{k} \right) \in$

אם  $a$  נקודת קיצון של  $f$  ב- $C$  :  $C = \{x \in W \mid \varphi = c\}$

כאשר  $W = (0, \infty)^k$  קבוצת בתולה.

$\varphi = (g, h)$  ו- $h$  היא פונקציה ב- $W$ .

$a$  היא נקודת קיצון מקומית של  $f$  תחת המילוי  $\varphi=c$ .

לכן נשתמש ב-7.ה.11 (הקטניות של  $\nabla f(a)$ ,  $\nabla g(a)$ ,  $\nabla h(a)$ ) תלויים/תלומות.

חשבת קודם את  $\nabla f$  וכן  $\nabla g$  ו- $\nabla h$ .

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \dots & \frac{1}{a_k} \\ \frac{1}{a_1^2} & \frac{1}{a_1^2} & \dots & \frac{1}{a_k^2} \end{pmatrix}$

תלויים/תלומות זלך רמתה/מילוי

$\begin{cases} (1, 1, \dots, 1) = \nabla g(a) \\ (\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_k}) = \frac{1}{a_1 \cdots a_k} \nabla f(a) \\ (\frac{1}{a_1^2}, \dots, \frac{1}{a_k^2}) = -\nabla h(a) \end{cases}$

כיוון 2

$\frac{(a_1 - a_2)(a_1 - a_k)(a_1 - a_k)}{a_1^2 a_2^2 a_k^2} = 0 \iff \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_k} \\ \frac{1}{a_1^2} & \frac{1}{a_2^2} & \frac{1}{a_k^2} \end{pmatrix} = 0$

מקורה  $a = (a_1, \dots, a_k)$  און  $a_1 = a_2 = \dots = a_k$  משום שכל אחד מהם שווה לאחד.

לדוגמה  $a_1 = a_2 = \dots = a_k = q$  כי במקרה זה  $h(a) = 2$  ו- $h(a) = 2$  נכונה  $\sum a_i = g(a) = q$  ו- $a_i = \frac{q}{k}$  נכונה.

לכן יש בדיוק שני מילויים של  $h$  :  $q = g(a) = k a + (k-m) \frac{1}{a}$  ו- $2 = h(a) = \frac{m}{a} + \frac{k-m}{a}$

$a = (\alpha, \beta, \beta, \beta)$  שורשי המרחב  $\mathbb{R}^4$  :  $K=4$  : מקרה 3!  
 $M=1$

$$\begin{cases} q = \alpha + 3\beta \\ 2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = q - 3\beta \\ 2 = \frac{1}{q-3\beta} + \frac{3}{\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(q-3\beta) \cdot \beta = \beta + 3(q-3\beta) \\ 18\beta - 6\beta^2 = \beta + 27 - 9\beta \end{cases}$$

$$\beta = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 3 \cdot 27}}{6} = \frac{13 \pm \sqrt{7}}{6} \quad \leftarrow \begin{cases} 0 = 6\beta^2 - 26\beta + 27 \\ 0 = 3\beta^2 - 13\beta + \frac{27}{2} \end{cases}$$

$$\alpha = q - 3\beta = 9 - 3 \cdot \frac{13 \pm \sqrt{7}}{6} = 9 - \frac{13 \pm \sqrt{7}}{2} = \frac{5 \mp \sqrt{7}}{2}$$

$$f(a) = \alpha \cdot \beta^3 = \frac{5 \mp \sqrt{7}}{2} \cdot \left( \frac{13 \pm \sqrt{7}}{6} \right)^3 = \frac{2188 \mp 25\sqrt{7}}{108} \begin{cases} 19.6468168261425190 \\ 20.8717016923761 \end{cases}$$

$a = (\alpha, \alpha, \beta, \beta)$  שורשי המרחב  $\mathbb{R}^4$  :  $K=4$  : מקרה 3!  
 $M=2$

$$\begin{cases} q = 2\alpha + 2\beta \\ 2 = \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{q}{2} - \alpha \\ \alpha\beta = \beta + \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha(\frac{q}{2} - \alpha) = \frac{q}{2} \\ 0 = \alpha^2 - \frac{q}{2}\alpha - \frac{q}{2} \end{cases}$$

$$0 = 2\alpha^2 - q\alpha - q$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{q}{2} - 3 = \frac{3}{2} & \text{אם } \alpha = 3 \\ \beta = \frac{q}{2} - \frac{3}{2} = 3 & \text{אם } \alpha = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 2 \cdot 9}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{9 \pm 3}{4} = \frac{3}{2} \text{ או } 3$$

אם  $a = (3, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$  כן

$$f(a) = 3 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{81}{4} = 20.25$$

$a = (2, 2, 2, 2)$  שורשי המרחב  $\mathbb{R}^4$  :  $K=4$  : מקרה 3!  
 $M=1$   
 $f(a) = 2^4 = 16$

אם  $a \in C$  וזו קבוצת המרחב  $\mathbb{R}^4$  :

$a \in \{ (\alpha, \beta, \beta, \beta), (\beta, \alpha, \beta, \beta), (\beta, \beta, \alpha, \beta), (\beta, \beta, \beta, \alpha) \}$  : מקרה 3!  
 $M=1$

$$f(a) = \frac{2188 - 25\sqrt{7}}{108} \approx 19.646 \dots \quad \begin{cases} \alpha = \frac{5 - \sqrt{7}}{2} \\ \beta = \frac{13 + \sqrt{7}}{6} \end{cases} \quad \text{אם } a = (\alpha, \beta, \beta, \beta)$$

$$f(a) = \frac{2188 + 25\sqrt{7}}{108} \approx 20.8717 \dots \quad \begin{cases} \alpha = \frac{5 + \sqrt{7}}{2} \\ \beta = \frac{13 - \sqrt{7}}{6} \end{cases} \quad \text{אם } a = (\beta, \alpha, \beta, \beta)$$

שורשי המרחב  $\mathbb{R}^4$  :

$a \in \{ (\alpha, \alpha, \beta, \beta), (\alpha, \beta, \alpha, \beta), (\alpha, \beta, \beta, \alpha), (\beta, \alpha, \alpha, \beta), (\beta, \alpha, \beta, \alpha), (\beta, \beta, \alpha, \alpha) \}$  : מקרה 3!  
 $M=2$

$$f(a) = 20.25 \quad \text{אם } a = (\alpha, \alpha, \beta, \beta) \text{ או } (\beta, \beta, \alpha, \alpha)$$

אם  $a \in D$  וזו קבוצת המרחב  $\mathbb{R}^4$  :

$a = (2, 2, 2, 2)$  שורשי המרחב  $\mathbb{R}^4$  :  $K=4$  : מקרה 3!  
 $M=1$   
 $\min f(A) = f(2, 2, 2, 2) = 16$

$$\max f(A) = \frac{2188 + 25\sqrt{7}}{108} \approx 20.8717016923761 \dots$$

אם  $a = (\alpha, \beta, \beta, \beta)$  שורשי המרחב  $\mathbb{R}^4$  :  $K=4$  : מקרה 3!  
 $M=1$   
 $\alpha = \frac{5 + \sqrt{7}}{2}$  או  $\frac{5 - \sqrt{7}}{2}$